LE GRANDEZZE VETTORIALI

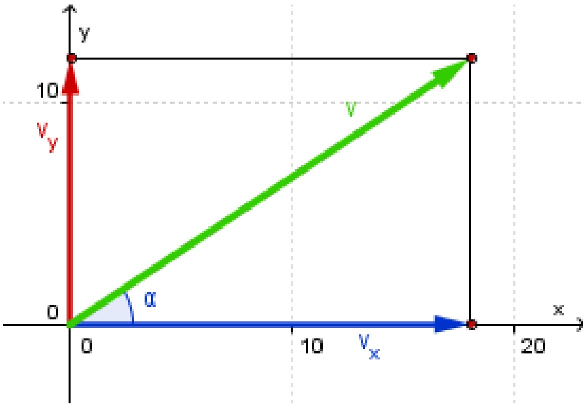
ESERCIZI

Esercizio 1

Le componenti cartesiane di un vettore sono $\vec{v}\,(18\,m\,;\;12\,m)$. Determina il modulo del vettore e l'angolo che esso forma con l'asse x.

Soluzione

D
A
T
I
$\begin{cases}\vec{v}\,(18\,m\,;\;12\,m)\end{cases}$



v ?

α ?

Il modulo del vettore è:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(18\,m)^2 + (12\,m)^2} = \sqrt{324\,m^2 + 144\,m^2} = \sqrt{468\;m^2} \cong 21{,}6\,m\,.$$

L'angolo che il vettore $\vec{v}$ forma con l'asse x è:

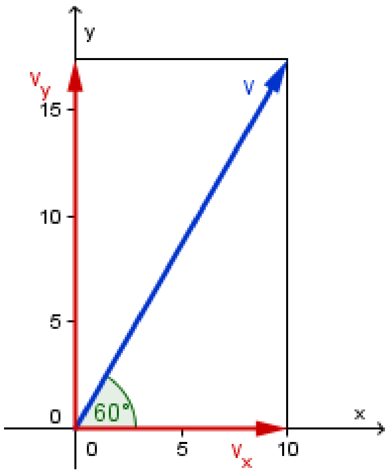
$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{12}{18}\right) = 33{,}7°\,.$$

Esercizio 68.6

Determina le componenti cartesiane di un vettore $\vec{v}$ di modulo $20\,cm$ che forma un angolo di $60°$ con la direzione dell'asse x.

Soluzione

D
A
T
I
$\begin{cases} v = 20\,cm \\ \alpha = 60° \end{cases}$



v_x ?

v_y ?

Le componenti cartesiane del vettore $\vec{a}$ sono:

$$v_x = v \cdot cos\,60° = \left(20 \cdot \tfrac{1}{2}\right)\,m = 10\,m$$

$$v_y = v \cdot sin\,60° = \left(20 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\,m = 17{,}3\,m$$

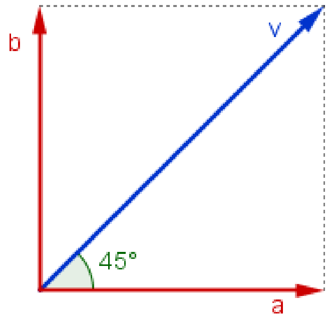
Esercizio 68.7

Determina il modulo di due vettori uguali e che formano tra loro un angolo di 90°, sapendo che hanno come somma un vettore di modulo 10 m.

Soluzione

D
A
T
I

$$\begin{cases} v = 10\,m \\ \alpha = 90° \end{cases}$$



$a\ ?$

$b\ ?$

Il modulo di due vettori uguali è:

$$a = b = v \cdot sin\,45° = \left(10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,m = 5\sqrt{2}\,m \cong 7{,}07\,m\,.$$

Esercizio 68.9

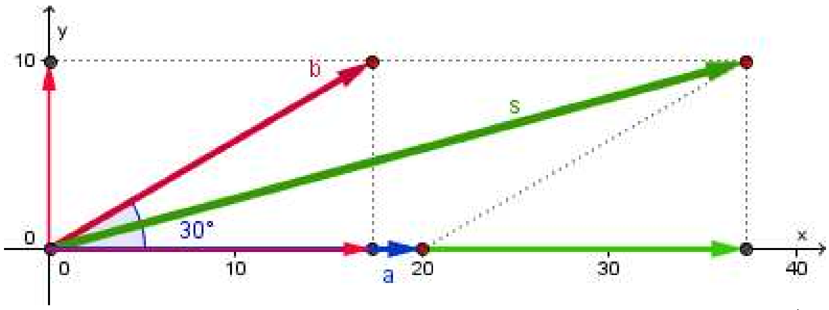
Determina il modulo del vettore somma di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ entrambi di modulo pari a $20{,}0\,m$ e che formano fra loro un angolo $\alpha = 30°$

Soluzione

Per semplificare i calcoli rappresentiamo i due vettori in un sistema di assi cartesiani in cui il primo vettore $\vec{a}$ ha la direzione e il verso dell'asse x.

D
A
T
I

$$\begin{cases} a = 20\,m \\ b = 20\,m \\ \alpha = 30° \end{cases}$$



Vettore somma $\vec{s}$?

In questo sistema di riferimento le componenti cartesiane dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono:

$$a_x = a = 20\,m \qquad b_x = b\,cos\,30° = \left(20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,m = 10\sqrt{3}\,m = 17{,}32\,m$$

$$a_y = 0 \qquad b_y = b\,sin\,30° = \left(20 \cdot \frac{1}{2}\right)\,m = 10\,m$$

Le componenti cartesiane del vettore somma sono:

$$s_x = a_x + b_x = (20 + 17{,}32)\,m = 37{,}32\,m \qquad s_y = a_y + b_y = (0 + 10)\,m = 10\,m\,.$$

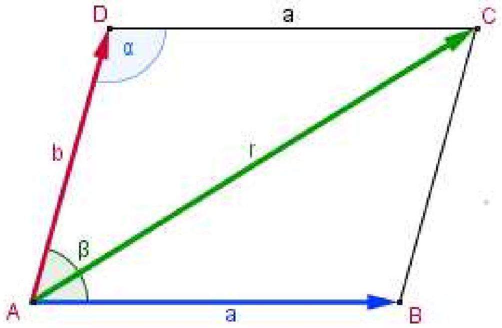
Il modulo del vettore somma è:

$$s = \sqrt{{s_x}^2 + {s_y}^2} = \sqrt{(37{,}32\,m)^2 + (10\,m)^2} = \sqrt{1392{,}82\,m^2 + 100\,m^2} = \sqrt{1492{,}82\ m^2} \cong 38{,}6\,m\,.$$

Esercizio 68.8

Determina l'ampiezza dell'angolo formato da due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ aventi modulo rispettivamente $8\,m$ e $6\,m$, sapendo che il modulo del vettore risultante è $10\,m$.

D
A
T
I
$\begin{cases} a = 8\,m \\ b = 6\,m \\ s = 10\,m \end{cases}$



α ?

Soluzione 1

Utilizzando la formula trigonometrica:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

si ricava:

$$\cos\alpha = \frac{r^2 - a^2 - b^2}{2ab} = \frac{10^2 - 8^2 - 6^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{0}{96} = 0 \ .$$

Da cui si ricava che: $\alpha = 90°$.

Pertanto l'ampiezza dell'angolo formato da due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è:

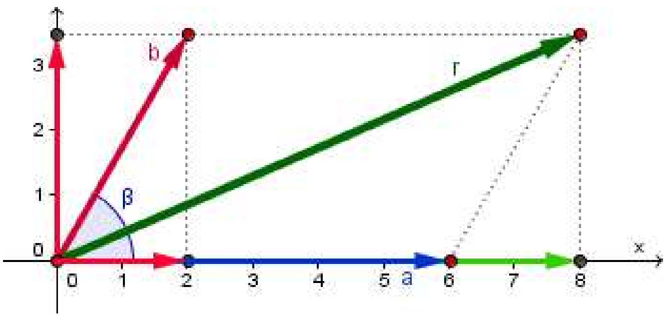
$$\beta = 180° - \alpha = 180° - 90° = 90° \ .$$

Soluzione 2

Siccome i moduli dei tre vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{r}$ formano una terna pitagorica, si deduce che l'ampiezza dell'angolo formato da due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è di $90°$.

Soluzione 3

Per semplificare i calcoli rappresentiamo i due vettori in un sistema di assi cartesiani in cui il primo vettore $\vec{a}$ ha la direzione e il verso dell'asse x.



In questo sistema di riferimento le componenti cartesiane dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono:

$a_x = a = 8$ $\qquad$ $b_x = b\cos\beta = 6 \cdot \cos\beta$

$a_y = 0$ $\qquad$ $b_y = b\sin\beta = 6 \cdot \sin\beta$

Le componenti cartesiane del vettore somma sono:

$r_x = a_x + b_x = 8 + 6 \cdot \cos\beta$ $\qquad$ $r_y = a_y + b_y = 0 + 6 \cdot \sin\beta$.

Utilizzando la relazione: $r = \sqrt{{r_x}^2 + {r_y}^2}$ si ottiene: $r^2 = {r_x}^2 + {r_y}^2$

Sostituendo in essa i dati del problema si ricava:

$$10^2 = (8 + 6 \cdot \cos\beta)^2 + (6 \cdot \sin\beta)^2$$

$$100 = 64 + 36\cos^2\beta + 96\cos\beta + 36\sin^2\beta$$

$$100 = 64 + 36\,(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + 96\cos\beta \qquad \textit{essendo} \ \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

$$100 = 64 + 36 \cdot 1 + 96\cos\beta$$

$$0 = 96\cos\beta$$

$\cos\beta = 0$ da cui si ha $\beta = 90°$.

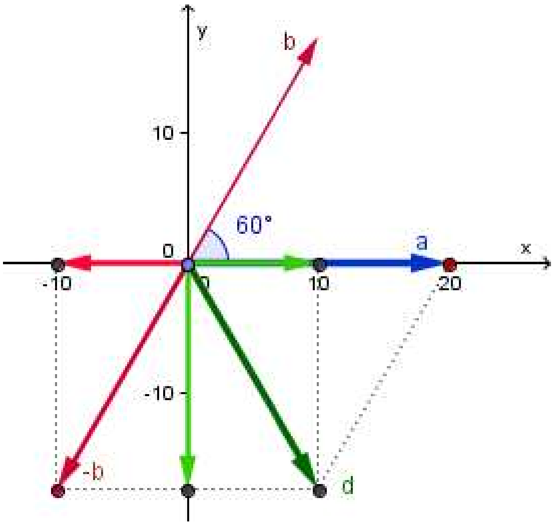
Esercizio 68.10

Determina il modulo del vettore differenza di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ entrambi di modulo pari a $20{,}0\ m$ e che formano fra loro un angolo $\alpha = 60°$

Soluzione

Per semplificare i calcoli rappresentiamo i due vettori in un sistema di assi cartesiani in cui il primo vettore $\vec{a}$ ha la direzione e il verso dell'asse x.

DATI $\begin{cases} a = 20\ m \\ b = 20\ m \\ \alpha = 60° \end{cases}$



Vettore differenza $\vec{d}$?

La differenza si ottiene eseguendo la somma fra il vettore $\vec{a}$ e l'opposto del vettore $\vec{b}$.

In questo sistema di riferimento le componenti cartesiane dei due vettori $\vec{a}$ e $-\vec{b}$ sono:

$$a_x = a = 20\ m \qquad -b_x = -b \cdot \cos 60° = -20 \cdot \frac{1}{2}\ m = -10\ m$$

$$a_y = 0 \qquad -b_y = -b \cdot \sin 60° = -20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ m = -10\sqrt{3}\ m$$

Le componenti cartesiane del vettore differenza sono:

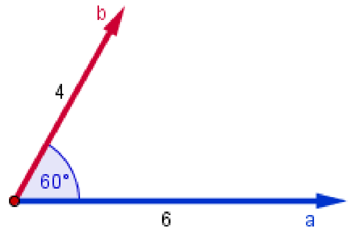
$$d_x = a_x - b_x = (20 - 10)\ m = 10\ m \qquad d_y = a_y + b_y = \left(0 - 10\sqrt{3}\right) m = -10\sqrt{3}\ m\,.$$

Il modulo del vettore differenza è:

$$d = \sqrt{{d_x}^2 + {d_y}^2} = \sqrt{(10\ m)^2 + \left(-10\sqrt{3}\ m\right)^2} = \sqrt{100\ m^2 + 300\ m^2} = 20\ m\,.$$

Esercizio 68.12

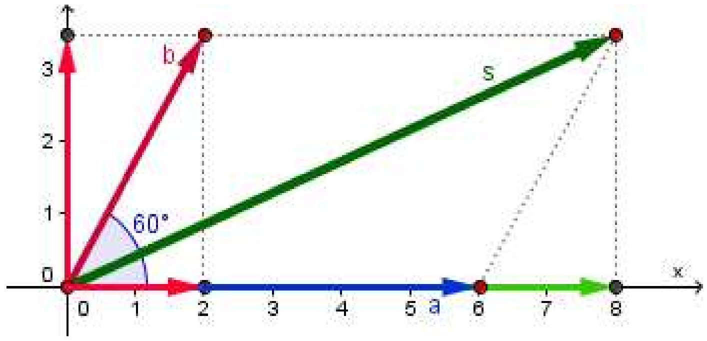
Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ di modulo rispettivamente pari a $6\,m$ e $4\,m$ e che formano fra loro un angolo $\alpha = 60°$, determinare il vettore somma $\vec{s}$ e il vettore differenza $\vec{d}$.



Soluzione

Per semplificare i calcoli rappresentiamo i due vettori in un sistema di assi cartesiani in cui il primo vettore $\vec{a}$ ha la direzione e il verso dell'asse x.

D A T I $\begin{cases} a = 6\,m \\ b = 4\,m \\ \alpha = 60° \end{cases}$



Vettore somma $\vec{s}$?

In questo sistema di riferimento le componenti cartesiane dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono:

$$a_x = a = 6\,m \qquad b_x = b\cos 60° = 4 \cdot \frac{1}{2}\,m = 2\,m$$

$$a_y = 0 \qquad b_y = b\sin 60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,m = 2\sqrt{3}\,m$$

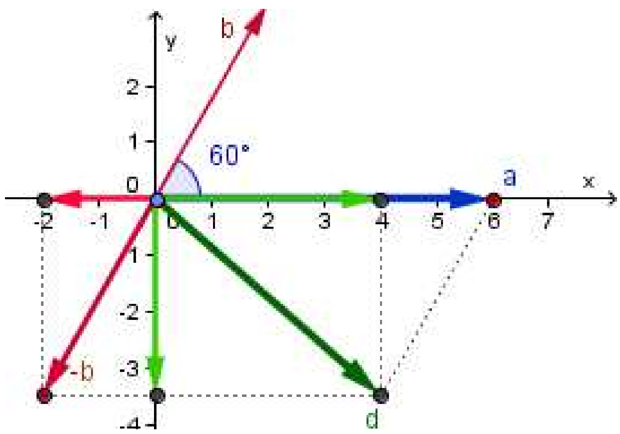
Le componenti cartesiane del vettore somma sono:

$$s_x = a_x + b_x = (6+2)m = 8\,m \qquad s_y = a_y + b_y = \left(0 + 2\sqrt{3}\right)m = 2\sqrt{3}\,m\,.$$

Il modulo del vettore somma è:

$$s = \sqrt{{s_x}^2 + {s_y}^2} = \sqrt{(8\,m)^2 + \left(2\sqrt{3}\,m\right)^2} = \sqrt{64\,m^2 + 12\,m^2} = \sqrt{76\,m^2} = 8{,}72\,m\,.$$

D A T I $\begin{cases} a = 6\,m \\ b = 4\,m \\ \alpha = 60° \end{cases}$



Vettore differenza $\vec{d}$?

La differenza si ottiene eseguendo la somma fra il vettore $\vec{a}$ e l'opposto del vettore $\vec{b}$.

In questo sistema di riferimento le componenti cartesiane dei due vettori $\vec{a}$ e $-\vec{b}$ sono:

$$a_x = a = 6\,m \qquad -b_x = -b \cdot \cos 60° = -4 \cdot \frac{1}{2}\,m = -2\,m$$

$$a_y = 0 \qquad -b_y = -b \cdot \sin 60° = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,m = -2\sqrt{3}\,m$$

Le componenti cartesiane del vettore differenza sono:

$$d_x = a_x + b_x = (6-2)\,m = 4\,m \qquad d_y = a_y + b_y = \left(0 - 2\sqrt{3}\right)m = -2\sqrt{3}\,m\,.$$

Il modulo del vettore differenza è:

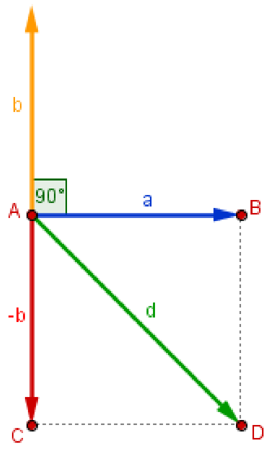
$$d = \sqrt{{d_x}^2 + {d_y}^2} = \sqrt{(4\,m)^2 + \left(-2\sqrt{3}\,m\right)^2} = \sqrt{16\,m^2 + 12\,m^2} = 5{,}29\,m\,.$$

Esercizio 68.13

Determina la differenza di due vettori perpendicolari tra loro e di modulo uguali a 1 .

<u>*Soluzione*</u>

D A T I $\begin{cases} a = 1\,m \\ b = 1\,m \\ \alpha = 90° \end{cases}$



Vettore differenza $\vec{d}$ *?*

Chiamiamo il primo vettore $\vec{a}$ e il secondo vettore $\vec{b}$.

La differenza si ottiene eseguendo la somma fra il vettore $\vec{a}$ e l'opposto del vettore $\vec{b}$.

Il vettore differenza è dato dalla diagonale del quadrato $ABCD$ avente per lati i due vettori $\vec{a}$ e $-\vec{b}$.

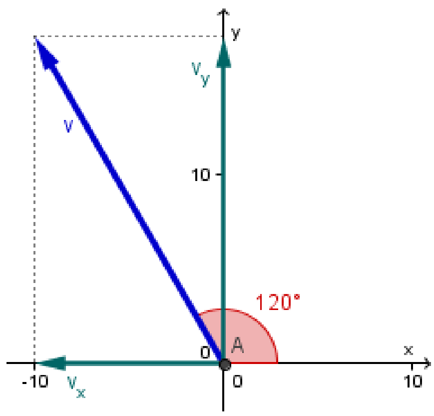
Il modulo del vettore differenza è: $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Esercizio 68.15

Determina le componenti cartesiane di un vettore $\vec{v}$ di modulo pari a $20\,m$ e che forma un angolo di $120°$ con l'asse delle x.

<u>*Soluzione*</u>

D A T I $\begin{cases} v = 20\,m \\ \alpha = 120° \end{cases}$



Componenti cartesiane $(v_x\,;\,v_y) = ?$

Le componenti cartesiane del vettore $\vec{v}$ sono:

$v_x = v \cdot cos\,\alpha = (20 \cdot cos\,120°)\,m = -10\,m$

$$v_y = v \cdot sin\,\alpha = (20 \cdot sin\,120°)\,m = \left(20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,m = 10\sqrt{3}\,m = 17{,}3\,m\,.$$

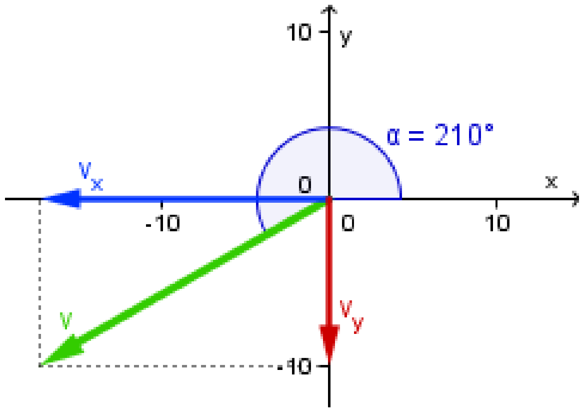
Esercizio 68.16

Determina le componenti cartesiane di un vettore $\vec{v}$ di modulo pari a $20\ m$ e che forma un angolo di $210°$ con l'asse delle x.

Soluzione

D
A
T
I

$$\begin{cases} v = 20\ m \\ \alpha = 120° \end{cases}$$



Componenti cartesiane

$(v_x\ ;\ v_y) = ?$

Le componenti cartesiane del vettore $\vec{v}$ sono:

$v_x = v \cdot cos\,\alpha = (20 \cdot cos\,210°)\ m = -17{,}3\ m$

$v_y = v \cdot sin\,\alpha = (20 \cdot sin\,210°)\ m = \left(20 \cdot \frac{1}{2}\right)\ m = 10\sqrt{3}\ m\ = -10\ m\,.$

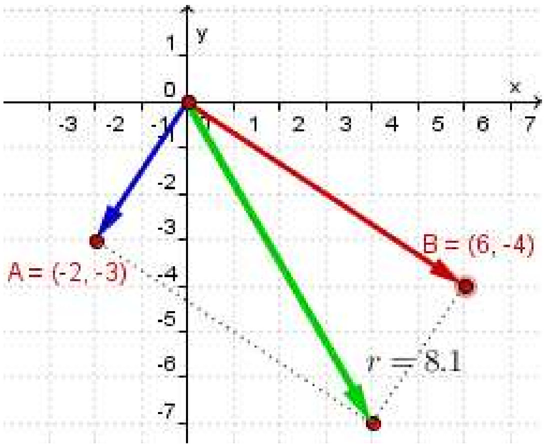
Esercizio 68.17

Determina graficamente e analiticamente il modulo del vettore risultante della seguente coppia di vettori $\vec{a}\,(-2\,;\,-3)$ e $\vec{b}\,(6\,;\,-4)$.

Soluzione

D
A
T
I

$$\begin{cases} \vec{a}\,(-2\,;\,-3) \\ \vec{b}\,(6\,;\,-4) \end{cases}$$



Vettore risultante

$r = ?$

Le componenti cartesiane del vettore somma sono:

$s_x = a_x + b_x = -2 + 6\ = 4$ $\qquad$ $s_y = a_y + b_y = -3 + (-4) = -7\,.$

Il modulo del vettore somma è:

$$s = \sqrt{{s_x}^2 + {s_y}^2}\ = \sqrt{4^2 + (-7)^2}\ = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65} =\ 8{,}1\,.$$

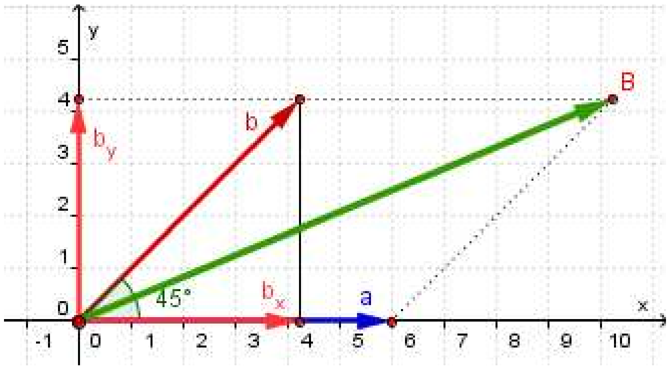
Esercizio 68.18

Determina il vettore somma $\vec{s}$ di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ di modulo pari a $6\,m$ e che formano fra loro un angolo $\alpha = 45°$.

Soluzione

Per semplificare i calcoli rappresentiamo i due vettori in un sistema di assi cartesiani in cui il primo vettore $\vec{a}$ ha la direzione e il verso dell'asse x.

D A T I $\begin{cases} a = 6\,m \\ b = 6\,m \\ \alpha = 45° \end{cases}$



Vettore somma $\vec{s}$ *?*

In questo sistema di riferimento le componenti cartesiane dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono:

$a_x = a = 6\,m$ $\qquad$ $b_x = b\cos 45° = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,m = 3\sqrt{2}\,m = 4{,}24\,m$

$a_y = 0$ $\qquad$ $b_y = b\sin 45° = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,m = 3\sqrt{2}\,m = 4{,}24\,m$

Le componenti cartesiane del vettore somma sono:

$s_x = a_x + b_x = (6 + 4{,}24)m = 10{,}24\,m$

$s_y = a_y + b_y = (0 + 4{,}24)\,m = 4{,}24\,m$.

Il modulo del vettore somma è:

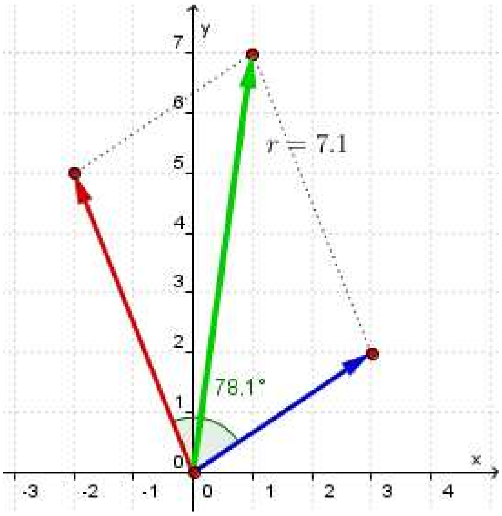
$$s = \sqrt{{s_x}^2 + {s_y}^2} = \sqrt{(10{,}24\ m)^2 + (4{,}24\,m)^2} = \sqrt{104{,}86\,m^2 + 18\,m^2} = \sqrt{76\,m^2} = 11{,}1\,m\,.$$

Esercizio 68.17

Calcola il modulo del vettore risultante della seguente coppia di vettori $\vec{a}\,(3\,;\,2)$ e $\vec{b}\,(-2\,;\,5)$.

<u>*Soluzione*</u>

$$D\,A\,T\,I \begin{cases} \vec{a}\,(3\,;\,2) \\ \vec{b}\,(-2\,;\,5) \end{cases}$$



Vettore risultante
$r = ?$

Le componenti cartesiane del vettore somma sono:

$$s_x = a_x + b_x = 3 + (-2) = 1 \qquad s_y = a_y + b_y = 2 + 5 = 7\,.$$

Il modulo del vettore somma è:

$$s = \sqrt{{s_x}^2 + {s_y}^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 7{,}1\,.$$