

Appunti di Teoria dei Campi

Bernard van Heck

Indice

1	Principio di località in teoria dei campi	4
2	Simmetrie dello spazio-tempo	6
2.1	Invarianza e trasformazioni di Lorentz	6
2.2	Esempio: il campo scalare di Klein-Gordon	7
2.3	Traslazioni	9
3	Spettro di massa di una teoria di interazione	10
4	Matrice S e basi IN e OUT	11
4.1	Completezza	13
5	Funzioni di correlazione	13
5.1	Funzione a due punti: rappresentazione spettrale	14
5.2	Teorema spin-statistica	16
5.3	Funzione a due punti e spettro di massa	16
5.4	Singolarità e distribuzioni	18
6	Teorema del limite asintotico	20
7	Formule di riduzione	23
7.1	T-prodotti	26
8	Metodo dell'integrale funzionale in teoria dei campi	29
8.1	Rotazione di Wick e spazio euclideo	30
8.2	Discretizzazione, cut-off e limite del continuo	33

9	Rinormalizzazione	35
9.1	Criterio di rinormalizzabilità	35
9.2	Richiami di teoria delle perturbazioni con l'integrale funzionale	36
9.3	Rinormalizzazione al prim'ordine per la teoria $\lambda\phi^4$	38
9.4	Rinormalizzazione al secondo ordine per la teoria $\lambda\phi^4$	40
9.5	Problema dei grandi logaritmi	43
9.6	Divergenze infrarosse	44
9.7	Equazioni di Callan-Symanzik	45
10	Libertà asintotica	49
10.1	Calcolo di $\beta(g)$ per la teoria $\lambda\phi^4$	51
10.2	Argomento di Landau	52
10.3	Variazioni dello spettro di massa	53
11	Fermioni	53
11.1	Variabili grassmanniane	53
11.2	Integrali gaussiani	55
11.3	Funzionale generatore	56
11.4	Propagatore fermionico	59
11.5	Determinante funzionale e loop	61
12	Quantizzazione delle teorie di gauge	63
12.1	Brevissimi richiami sulle teorie di Yang-Mills	63
12.2	Misura invariante	63
12.3	Metodo di Faddeev-Popov	65
12.4	Determinante di Faddeev-Popov	68
12.4.1	Caso abeliano	68
12.4.2	Caso non-abeliano: i ghost	69
12.5	Funzionale generatore per un campo di gauge	71
12.6	Problema di Gribov	74
13	Simmetrie	75
13.1	Teorema di Noether	75
13.2	Simmetrie $SO(N)$	75
14	Identità di Ward	80
14.1	Proprietà di clustering	80
14.2	Prime identità di Ward	80

14.3 Derivazione dall'integrale funzionale	81
15 Teorema di Goldstone	83
15.1 Proprietà del bosone di Goldstone	87
15.2 Deduzione dalle identità di Ward	87
16 Rottura spontanea della simmetria	88
16.1 Meccanismo di Higgs	91

1 Principio di località in teoria dei campi

La teoria dei campi è la teoria che unisce la meccanica quantistica alla relatività. Abbiamo cioè la necessità di introdurre le restrizioni dovute alla località dello spazio-tempo: due eventi separati da un intervallo di tipo spazio devono essere indipendenti per preservare la causalità della teoria. La struttura della meccanica quantistica rimane invariata in teoria dei campi: abbiamo uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , una base completa di stati $|p\rangle$ e un insieme di operatori locali $O(x)$ definiti punto per punto nello spazio-tempo. Questo insieme di operatori deve cioè soddisfare la regola di commutazione:

$$[O_1(x), O_2(y)] = 0 \quad \text{per } x \sim y \quad (1.1)$$

ovvero gli operatori devono commutare se x e y sono a distanza di tipo spazio. Questa condizione impedisce la trasmissione di segnali lungo intervalli di tipo spazio. Come sappiamo infatti il commutatore è collegato all'indeterminazione della misura contemporanea di due osservabili, che in questo caso dev'essere nulla data la richiesta della loro indipendenza. Vogliamo però dimostrare esplicitamente che dalla richiesta di località seguono tali condizioni matematiche per gli operatori della nostra teoria.

Supponiamo di avere una teoria caratterizzata da una hamiltoniana H funzione dell'insieme di osservabili $\{O_i\}$ e due osservatori A e B nello spazio-tempo. Mettiamoci in schema di interazione e supponiamo di voler eseguire un esperimento di trasmissione fra i due osservatori. L'osservatore A costruisce quindi un trasmettitore localizzato in una certa zona dello spazio e che accende per un certo intervallo di tempo. Questo modifica l'hamiltoniana nel seguente modo:

$$H \longrightarrow H + \int d^3x J(\mathbf{x}, x^0)A(\mathbf{x}, x^0) \quad (1.2)$$

dove J è una funzione a supporto compatto. In particolare è nulla per valori temporali esclusi dall'intervallo, diciamo, $[x_m^0, x_M^0]$. Quando $J \neq 0$ ci sarà un'emissione di segnale che potrà forse essere rilevato dall'osservatore B . Supponiamo (per semplicità) che la sorgente sia tale da poter usare la teoria delle perturbazioni al prim'ordine. Prima dell'accensione del trasmettitore ci troviamo in uno stato $|\alpha\rangle$ che è stazionario per $x^0 < x_m^0$. Quando accendiamo l'interazione, lo stato evolverà in funzione del tempo, e poiché siamo in schema di interazione sappiamo che questa evoluzione dipende solo dal termine aggiuntivo dell'hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
|\alpha, t\rangle &= T \left\{ \exp -i \int_{-\infty}^t d^4 y A(y) J(y) \right\} |\alpha\rangle \simeq \\
&\simeq |\alpha\rangle - i \int_{-\infty}^t d^4 y A(y) J(y) |\alpha\rangle
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Per studiare le misure di B dobbiamo calcolare il prodotto scalare $\langle \alpha, t | B(x) | \alpha, t \rangle$, che trascurando termini in J^2 assume la forma:

$$\langle \alpha | B(x) | \alpha \rangle + i \int_{-\infty}^t d^4 y J(y) \langle \alpha | [A(y), B(x)] | \alpha \rangle \tag{1.4}$$

Stiamo eseguendo la cosiddetta teoria della risposta lineare usata anche in struttura della materia: è la situazione molto frequente in cui si deve calcolare la risposta di un'osservabile ad una perturbazione dell'hamiltoniana (tipico esempio è quello della risposta della conducibilità di un solido all'accensione di un campo elettrico esterno). Il primo termine può essere considerato come un segnale di fondo costante al quale non è associata nessuna informazione. Il termine interessante è invece il secondo, quello con l'integrale. Se l'evento x è esterno a tutti i coni luce costruibili nella regione di origine del segnale, dobbiamo imporre che non vi sia alcuna variazione nelle misure di B poiché questo osservatore non può ricevere alcun segnale. Questo in termini matematici si traduce nelle condizioni $[A(y), B(x)] = 0$ per $x \sim y$, come volevamo dimostrare. Le regole di commutazione canonica a tempi uguali che si introducono per quantizzare una teoria,

$$\begin{cases}
[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] &= 0 \\
[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] &= 0 \\
[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] &= -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})
\end{cases} \tag{1.5}$$

chiaramente soddisfano la condizione di località. Ricordiamo che tutti gli eventi di tipo spazio sono riconducibili a eventi a tempi uguali in qualche sistema di riferimento! In questo senso il commutatore dev'essere o nullo oppure concentrato in un punto (e dunque una delta di Dirac o una sua derivata).

2 Simmetrie dello spazio-tempo

2.1 Invarianza e trasformazioni di Lorentz

Vogliamo vedere come possiamo esprimere la covarianza relativistica (i.e. il principio di invarianza delle leggi della fisica per diversi osservatori inerziali) in teoria dei campi. Nel caso classico si fa così: se prendiamo due osservatori O e O' connessi da una trasformazione di Lorentz propria Λ in maniera tale che le coordinate nei due sistemi di riferimento sono legate dalla relazione $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, allora i valori $\phi(x)$ e $\phi'(x')$ di un campo scalare misurati rispettivamente da O ed O' nello stesso punto dello spazio-tempo sono collegati dalla relazione

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{2.1}$$

Questo riflette semplicemente il fatto che se è nota la configurazione per O , allora lo è anche per qualsiasi altro sistema di riferimento inerziale, in virtù della loro equivalenza. Chiaramente possono esserci casi geometricamente più complicati in cui questa equivalenza si riflette in relazioni diverse:

- campi vettoriali: $V'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu}(x)$
- campi spinoriali: $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$
- campi tensoriali etc etc...

Quantisticamente, tuttavia, allo spazio di Hilbert è associata una sola quantità $\phi(x)$ rappresentativa, ad esempio, di un campo scalare. Come tradurre tutte queste relazioni? Sappiamo che il campo classico $\phi(x)$ è uguale al valor medio del campo quantistico $\langle p|\phi(x)|p\rangle$. Le relazioni di trasformazione dei campi dovranno essere trasportate sugli stati dello spazio di Hilbert. Ad una stessa configurazione fisica del sistema corrisponderanno due stati diversi per due osservatori diversi: $|p\rangle$ per O , $|p'\rangle$ per O' (ad esempio potremmo avere uno stato di riposo e un'onda piana). Per il teorema di Wigner essendo il gruppo di Lorentz una simmetria della teoria la relazione fra gli stati $|p\rangle$ e gli stati $|p'\rangle$ dovrà essere unitaria ¹:

$$|p'\rangle = U(\Lambda)|p\rangle \tag{2.2}$$

¹parliamo di unitarietà e non di anti-unitarietà poiché stiamo trattando le trasformazioni di Lorentz proprie ed ortocrone: $\det \Lambda = 1$ e $\Lambda_0^0 \geq 1$.

Dunque la condizione classica 2.1 può essere riscritta in termini dell'operatore quantistico e di queste trasformazioni $U(\Lambda)$. Imponendo $\langle p' | \phi(x') | p' \rangle = \langle p | \phi(x) | p \rangle$ si ottiene per un campo scalare la relazione:

$$U^\dagger(\Lambda) \phi(\Lambda x) U(\Lambda) = \phi(x) \quad (2.3)$$

Per campi di diverso tipo la relazione può essere estesa facilmente una volta conosciuta l'opportuna rappresentazione $S(\Lambda)$ del gruppo di Lorentz; scriviamo qui anche la sua versione rigirata che può essere facilmente incontrata:

$$\begin{cases} U^\dagger(\Lambda) \phi_r(\Lambda x) U(\Lambda) = S_{rs}(\Lambda) \phi_s(x) \\ U(\Lambda) \phi_s(x) U^\dagger(\Lambda) = S_{sr}^{-1}(\Lambda) \phi_r(\Lambda x) \end{cases} \quad (2.4)$$

Come già accennato, le U per la teoria dei gruppi sono una rappresentazione unitaria del gruppo di Lorentz (Poincaré). Una rappresentazione è una corrispondenza biunivoca fra un gruppo ed uno spazio vettoriale, che conservi l'algebra del gruppo.

2.2 Esempio: il campo scalare di Klein-Gordon

Vediamo cosa succede per un campo scalare reale libero soluzione dell'equazione di Klein-Gordon $(\square + m^2)\phi(x) = 0$. Sappiamo che una soluzione esplicita per il campo ϕ è data da:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} \{a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx}\} \quad (2.5)$$

con $\omega_p = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ e naturalmente $p = (\omega_p, \mathbf{p})$. Vogliamo capire chi sono in questo caso gli operatori U che compaiono nella teoria: chiaramente agiranno sugli a_p e sui loro coniugati. Il punto è capire con quale regola ciò avviene. Per il momento consideriamo solo il gruppo di Lorentz, tratteremo separatamente le traslazioni. Inserendo la 2.5 nella relazione 2.3 si ottiene:

$$\int \frac{d^3 p}{\sqrt{2\omega_p}} \{U(\Lambda) a_p U^\dagger(\Lambda) e^{-ipx} + \text{h.c.}\} = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2\omega_p}} \{a_p e^{-ip(\Lambda x)} + \text{h.c.}\} \quad (2.6)$$

Per ottenere la regola di trasformazione per gli a_p dobbiamo far sì che questi moltiplichino lo stesso esponenziale per poterli eguagliare membro a

membro; questa è un'operazione non del tutto banale perché devo cambiare variabile di integrazione (da p a Λp) nell'integrale di destra ma la misura di integrazione così come scritta non è invariante. Dobbiamo ricorrere al fatto noto che la misura

$$\int \frac{d^3 p}{2\omega_p} = \int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \quad (2.7)$$

è invariante². Per sfruttare questa proprietà dobbiamo riscaldare i campi di un fattore $\sqrt{2\omega_p}$ in maniera tale da far comparire la misura d'integrazione desiderata. Ponendo $\tilde{a}_p = \sqrt{2\omega_p} a_p$ otteniamo:

$$\int \frac{d^3 p}{2\omega_p} \{U(\Lambda) \tilde{a}_p U^\dagger(\Lambda) e^{-ipx} + \text{h.c.}\} = \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} \{\tilde{a}_p e^{-ip(\Lambda x)} + \text{h.c.}\} \quad (2.8)$$

A questo punto cambiando variabile di integrazione (da p a Λp), sfruttando il fatto che $(\Lambda p)(\Lambda x) = px$ e rinominando alla fine la variabile di integrazione p , si ottengono facilmente le relazioni:

$$\begin{cases} U(\Lambda) \tilde{a}_p U^\dagger(\Lambda) = \tilde{a}_{\Lambda p} \\ U(\Lambda) \tilde{a}_p^\dagger U^\dagger(\Lambda) = \tilde{a}_{\Lambda p}^\dagger \end{cases} \quad (2.9)$$

Cosa ne deduciamo? Le due seguenti osservazioni:

- il vuoto è invariante di Lorentz. Ovvero lo stato $|0\rangle$ è lo stesso per tutti gli osservatori relativi a sistemi inerziali. Infatti questo è definito dalla relazione $\tilde{a}_p|0\rangle = 0$ nel sistema O . Per passare ad O' dobbiamo applicare $U(\Lambda)$ e otteniamo:

$$0 = U(\Lambda) \tilde{a}_p |0\rangle = U(\Lambda) \tilde{a}_p U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda) |0\rangle = \tilde{a}_{\Lambda p} U(\Lambda) |0\rangle \quad (2.10)$$

Poiché $U(\Lambda)$ è invertibile non può avere autovalori nulli, dunque dobbiamo dedurre che $U(\Lambda)|0\rangle = e^{i\phi(\Lambda)} |0\rangle$. È possibile poi dimostrare che la fase è nulla.

²Infatti sappiamo che la misura $d^4 p$ è invariante sotto trasformazioni di Lorentz essendo $\det \Lambda = 1$. Inoltre, la funzione $\theta(p^0)$ dipende solo dal segno della coordinata temporale di p e la presenza del fattore $\delta(p^2 - m^2)$ ci assicura del fatto che, essendo p un quadrivettore di tipo tempo, questo segno non cambia sotto trasformazioni di Lorentz. Dunque la combinazione $\theta(p^0) \delta(p^2 - m^2)$ è un invariante.

- Dato uno stato di singola particella $|p\rangle = \tilde{a}_p^\dagger|0\rangle$ in O , in O' avremo lo stato:

$$U(\Lambda)\tilde{a}_p^\dagger|0\rangle = U(\Lambda)\tilde{a}_p^\dagger U^\dagger(\Lambda)U(\Lambda)|0\rangle = \tilde{a}_{\Lambda p}^\dagger|0\rangle \quad (2.11)$$

Dunque se O osserva una particella di impulso p , O' osserverà una particella di impulso Λp . Questo è il risultato che ci aspettavamo.

- Si può dedurre per iterazione che lo stesso risultato si ottiene per stati ad n particelle con impulsi arbitrari.

2.3 Traslazioni

Si possono completare le relazioni 2.4 andando a considerare anche la simmetria sotto traslazioni dell'origine delle coordinate, che, insieme al gruppo di Lorentz, forma il gruppo di simmetria completo dello spazio-tempo in relatività, il gruppo di Poincaré. La modifica si effettua semplicemente scrivendo che, sotto un cambio di coordinate definito da $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + b^\mu$, si ha una trasformazione:

$$U^\dagger(\Lambda, b) \phi_r(\Lambda x + b) U(\Lambda, b) = S_{rs}(\Lambda) \phi_s(x) \quad (2.12)$$

Notiamo che le matrici S non dipendono dalla traslazione, poiché esse rispecchiano la natura geometrica del campo cui fanno riferimento, e sappiamo che le proprietà geometriche non dipendono dalla scelta dell'origine. Se ci limitiamo a considerare separatamente le traslazioni, per ogni operatore locale $O(x)$ possiamo scrivere che:

$$U(b)O(x)U^\dagger(b) = O(b+x) \quad (2.13)$$

Se applichiamo questa relazione al campo scalare 2.5 otteniamo semplicemente:

$$U(b)\tilde{a}_p U^\dagger(b) = \tilde{a}_p e^{-ipb} \quad (2.14)$$

Se nel sistema O misuriamo lo stato ad n particelle $\tilde{a}_{p_1} \dots \tilde{a}_{p_n}|0\rangle$, nel sistema traslato di b osserveremo lo stato:

$$U(b)\tilde{a}_{p_1} \dots \tilde{a}_{p_n}|0\rangle = U(b)\tilde{a}_{p_1} U^\dagger(b)U(b)\tilde{a}_{p_2} \dots U(b)|0\rangle = e^{ipb} \tilde{a}_{p_1} \dots \tilde{a}_{p_n}|0\rangle \quad (2.15)$$

Dunque $U(b) = \exp(ip^\mu b_\mu)$. Recuperiamo il vecchio risultato secondo il quale le traslazioni spazio-temporali sono generate dal 4-impulso. Chiamamente è un risultato valido al di là dell'esempio specifico del campo di Klein-Gordon. Per ogni operatore locale $O(x)$, di qualsiasi tipo, vale la regola:

$$O(x + b) = e^{ipb} O(x) e^{-ipb} \quad (2.16)$$

Le quattro componenti di p^μ sono 2 operatori hermitiani che commutano fra loro (poiché le traslazioni commutano) e sono i generatori del gruppo di Poincaré.

3 Spettro di massa di una teoria di interazione

Vogliamo ora descrivere in termini generali lo spettro di una teoria di interazione, nel caso più semplice possibile. Vogliamo capire che tipo di insieme formano gli autovalori degli autostati simultanei di impulso ed energia. Per ora non consideriamo la presenza di particelle di massa nulla, che è un caso delicato (presenza di divergenze infrarosse e conseguenti difficoltà nel calcolo degli elementi di matrice S). Vogliamo considerare lo spettro degli stati stabili (autostati dell'energia: non comprendono le particelle che decadono). Ci aspettiamo che lo spettro dell'energia sia limitato inferiormente e che a questo minimo corrisponda lo stato di vuoto. Questo appartiene allo spettro discreto ed è normalizzabile: $\langle 0|0\rangle = 1$. Se rappresentiamo lo spettro sul piano $\{\mathbf{p}, p^0\}$, il vuoto si colloca nell'origine. Dopodiché, sappiamo che ogni particella stabile ha un'energia pari a $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Consideriamo qui il caso in cui esista solo una particella stabile di massa m : chiaramente dallo stato di vuoto non incontriamo nessun'altro stato nello spettro fino a quello di energia m dato da una particella con impulso nullo. L'intervallo fra lo stato di vuoto e tale stato è detto mass gap³. Lo stato di energia m è connesso a tutti gli altri stati ad una particella con impulsi diversi da zero che formano appunto un'iperboloide descritto dall'equazione $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. In assenza di interazione, se consideriamo gli stati a due particelle:

³Nel limite di massa nulla, il mass gap tende a zero e il vuoto diventa parte dello spettro continuo della teoria; questo fatto è all'origine del problema delle divergenze infraross, che infatti viene risolto praticamente fornendo una piccola massa anche alle particelle che ne sono sprovviste e poi facendo il limite a zero.

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_1^2} + \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_2^2} \end{cases} \quad (3.1)$$

vediamo che il minimo di p^0 si ha per $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$ ed ha energia $2m$; al variare dei due impulsi si ottiene poi un continuo di stati che formano un'iperboloide pieno. Salendo nel numero di particelle ottengo una serie di iperboloidi con un minimo in $\mathbf{p} = 0$ pari a $3m, 4m, \text{etc.}$ Questo tipo di spettro è valido anche nel caso di una teoria con interazioni a corto raggio alla Yukawa. In questo tipo di teoria è infatti possibile concepire degli stati di due particelle ognuna rappresentabile come un'onda piana separatamente dall'altra (ad esempio, pensiamo a due protoni a distanza infinita in assenza di elettromagnetismo: possono legittimamente essere considerati come particelle libere e dunque onde piane). Un'osservabile molto interessante è la massa delle particelle stabili in una teoria del genere a più particelle. Questo non coincide per forza con lo spettro di massa delle particelle sperimentali. In generale dallo spettro del 4-impulso non è possibile stabilire se una teoria è libera o meno.

4 Matrice S e basi IN e OUT

Passiamo a discutere la matrice S . Nello schema di Heisenberg è più delicato definirla, poiché gli stati non si evolvono e sono stazionari. In realtà la loro stazionarietà nasconde un'enorme quantità di informazione che è codificata nell'evoluzione nel tempo delle misure delle osservabili su tali stati stazionari. Nello schema di Heisenberg sono infatti gli osservabili ad evolvere nel tempo. Serve dunque definire due basi ben diverse per discutere processi di scattering: una per gli stati iniziali (base IN) e una per quelli finali (base OUT). Gli stati IN sono semplici (coerenti) per $t = -\infty$, gli stati out per $t = +\infty$. La probabilità della transizione $p_1, p_2 \rightarrow q_1 \dots q_n$ è data dal prodotto scalare $\langle q_1 \dots q_n \text{ out} | p_1, p_2 \text{ in} \rangle$. Gli stati IN e OUT sono tutti autostati di energia ed impulso e rappresentano due basi complete dello spazio di Hilbert. Le due basi coincidono nel caso di una teoria libera oppure sono ruotate una rispetto all'altra in presenza di interazione; la trasformazione unitaria che esegue questa rotazione è proprio la matrice di scattering o matrice S . Ovviamente lo stato di vuoto e gli stati di singola particella sono comuni alle due basi. Partendo dal vuoto, possiamo pensare di avere due diversi insiemi di ope-

ratori di creazione e distruzione relativi alle due diversi basi: gli operatori $a_p^{(in)}, a_p^{(in)\dagger}$ e gli operatori $a_p^{(out)}, a_p^{(out)\dagger}$ tali che ad esempio:

$$\begin{cases} a_{p_1}^{(in)\dagger} a_{p_2}^{(in)\dagger} |0\rangle = |p_1, p_2 \text{ in}\rangle \\ a_{p_1}^{(out)\dagger} a_{p_2}^{(out)\dagger} |0\rangle = |p_1, p_2 \text{ out}\rangle \end{cases} \quad (4.1)$$

È chiaro che in questo modo tutte le informazioni sulla dinamica verrebbero contenute nelle regole di commutazione incrociate fra gli operatori IN e OUT. Con queste regole di commutazione si possono infatti calcolare i prodotti scalari fra stati IN e OUT che sono gli elementi della matrice S. Ovviamente si tratta di regole molto complicate e non è questa la strada che viene seguita per calcolare praticamente le quantità fenomenologiche (tratteremo questo aspetto più in avanti con le formule di riduzione). Come agiscono le trasformazioni di Lorentz sulle due basi IN e OUT? In maniera molto semplice. Lasciando implicita la normalizzazione covariante da qui alla fine del capitolo, possiamo scrivere che:

$$U(\Lambda) |p_1, p_2 \text{ in}\rangle = |\Lambda p_1, \Lambda p_2 \text{ in}\rangle \quad (4.2)$$

e analogamente per gli stati OUT. A questo punto possiamo vedere cosa implica l'invarianza di Lorentz per la matrice S. Sempre operando con i vettori riscaldati in maniera covariante, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \langle q_1, q_2, q_3 \text{ out} | p_1, p_2 \text{ in}\rangle &= \langle q_1, q_2, q_3 \text{ out} | U^\dagger(\Lambda)U(\Lambda) | p_1, p_2 \text{ in}\rangle = \\ &= \langle \Lambda q_1, \Lambda q_2, \Lambda q_3 \text{ out} | \Lambda p_1, \Lambda p_2 \text{ in}\rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

Questa uguaglianza ci dice che gli elementi di matrice S non possono essere una funzione qualsiasi dei 4-impulsi ma solo una funzione delle loro combinazioni Lorentz-invarianti, ovvero dei loro prodotti scalari. Inoltre possiamo sfruttare anche l'invarianza sotto traslazioni:

$$\begin{aligned} \langle q_1, q_2, q_3 \text{ out} | p_1, p_2 \text{ in}\rangle &= \langle q_1, q_2, q_3 \text{ out} | U^\dagger(b)U(b) | p_1, p_2 \text{ in}\rangle = \\ &= e^{i(q_1+q_2+q_3)b} e^{-i(p_1+p_2)b} \langle q_1, q_2, q_3 \text{ out} | p_1, p_2 \text{ in}\rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dunque l'elemento di matrice è nullo a meno che non sia $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 + q_3$: abbiamo la conservazione del 4-impulso.

4.1 Completezza

La completezza di una base di vettori $|n\rangle$ si indica simbolicamente come:

$$\sum |n\rangle\langle n| = 1 \quad (4.5)$$

Nel nostro caso, con le basi IN e OUT, noi abbiamo però un misto di stati discreti e continui e anche il problema di una normalizzazione covariante: come possiamo concretizzare la relazione di completezza per poterla usare praticamente? Per entrambe le basi possiamo scrivere:

$$|0\rangle\langle 0| + \int d^3 \mathbf{p} |p\rangle\langle p| + \frac{1}{2!} \int d^3 \mathbf{p}_1 d^3 \mathbf{p}_2 |p_1, p_2\rangle\langle p_1, p_2| + \dots = 1 \quad (4.6)$$

Abbiamo separato i contributi dovuti a stati con diverso numero di particelle; nel termine relativo a stati ad n particelle compare un fattore numerico $1/n!$ la cui presenza si può giustificare applicando la somma di completezza agli stati di base. Tuttavia questa scrittura non è covariante; basta sostituire gli stati di base normali con quelli con la tilde, e compaiono di conseguenza le misure covarianti. La somma di completezza assume allora la forma definitiva:

$$|0\rangle\langle 0| + \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\omega_p} \widetilde{|p\rangle}\widetilde{\langle p|} + \frac{1}{2!} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2\omega_{p_1}} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{2\omega_{p_2}} \widetilde{|p_1, p_2\rangle}\widetilde{\langle p_1, p_2|} + \dots = 1 \quad (4.7)$$

Si può vedere che applicando una trasformazione di Lorentz la somma di completezza rimane invariata, semplicemente espressa nei vettori $|\Lambda p\rangle$. Similmente avrei potuto ottenere questo risultato con un cambio di variabili $p \rightarrow \Lambda p$.

5 Funzioni di correlazione

Vogliamo vedere come tutta la conoscenza della dinamica possa essere ricondotta a funzioni numeriche dette funzioni di correlazione: ovvero tutti i prodotti del tipo $\langle 0| O_1(x) \dots O_n(x) |0\rangle$. Data la conoscenza di questi numeri posso ricostruire tutte le osservabili interessanti (spettro di massa e matrice S di una teoria) grazie alle cosiddette formule di riduzione. In realtà tuttavia

questi oggetti non sono propriamente funzioni bensì distribuzioni. L'oggetto più semplice della gerarchia è:

$$\langle 0 | O(x) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{ipx} O(0) e^{-ipx} | 0 \rangle = \text{costante} \quad (5.1)$$

Andando avanti nella gerarchia incontriamo subito un oggetto molto interessante, la funzione a due punti.

5.1 Funzione a due punti: rappresentazione spettrale

Calcoliamo la quantità $\langle 0 | O(x) O(y) | 0 \rangle$ con O hermitiano.

$$\begin{aligned} \langle 0 | O(x) O(y) | 0 \rangle &= \sum_n \langle 0 | O(x) | n \rangle \langle n | O(y) | 0 \rangle = \\ &= \sum_n \langle 0 | e^{iPx} O(0) e^{-iPx} | n \rangle \langle n | e^{iPy} O(0) e^{-iPy} | 0 \rangle = \\ &= \sum_n \langle 0 | O(0) | n \rangle \langle n | O(0) | 0 \rangle e^{-ip_n(x-y)} = \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

Notiamo che per l'invarianza di Poincaré il prodotto dipende solo dalla differenza $(x - y)$ dei punti in cui i due campi sono valutati. Inoltre, ma solo perché abbiamo considerato il prodotto dello stesso operatore ripetuto due volte, abbiamo nella somma un modulo quadro moltiplicato per un esponenziale ovvero un oggetto definito non negativo. Possiamo riarrangiare l'espressione nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \dots &= \int d^4 q \sum_{n \neq 0} |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 \delta^4(q - p_n) e^{-iq(x-y)} = \\ &= \int d^4 q \tilde{\rho}(q) e^{-iq(x-y)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

con

$$\tilde{\rho}(q) = \sum_{n \neq 0} |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 \delta^4(q - p_n) \quad (5.4)$$

detta funzione spettrale⁴. La funzione $\tilde{\rho}$ ha una proprietà importantissima: il suo supporto contiene l'intero spettro degli stati fisici. Inoltre ha la

⁴Abbiamo escluso gli stati di vuoto per comodità. Sappiamo già che il loro contributo è una costante.

proprietà di essere un invariante di Lorentz, ovvero $\tilde{\rho}(q) = \tilde{\rho}(\Lambda q)$. Lo mostriamo facendo vedere che ripetendo il calcolo precedente con completezza e normalizzazione riferite agli impulsi trasformati il risultato sarebbe stato equivalente:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \neq 0} |\langle 0 | O(0) | \Lambda n \rangle|^2 \delta^4(\Lambda q - \Lambda p_n) &= \sum_{n \neq 0} |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 \delta^4(\Lambda(q - p_n)) = \\
&= \sum_{n \neq 0} |\langle 0 | O(0) U(\Lambda) | n \rangle|^2 \frac{\delta^4(q - p_n)}{|\det \Lambda|} = \\
&= \sum_{n \neq 0} |\langle 0 | U^\dagger(\Lambda) O(0) U(\Lambda) | n \rangle|^2 \frac{\delta^4(q - p_n)}{|\det \Lambda|} = \\
&= \sum_{n \neq 0} |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 \delta^4(q - p_n)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Abbiamo utilizzato le due proprietà $U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$ e $U^\dagger(\Lambda)O(0)U(\Lambda) = O(0)$. La seconda proprietà è valida solo per un operatore scalare, dunque ci siamo ristretti a questo caso. Dunque la funzione spettrale è un invariante. Sapendo che per le proprietà spettrali $\tilde{\rho}(q) = 0$ per $q_0 < 0$ e per vettori di tipo spazio, data l'invarianza possiamo scriverla nella forma:

$$\tilde{\rho}(q) = \rho(q^2) \frac{\theta(q_0)}{(2\pi)^3} \tag{5.6}$$

Dunque:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | O(x) O(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q_0) \rho(q^2) e^{-iq(x-y)} = \\
&= \int_0^\infty d\mu^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q_0) \rho(q^2) e^{-iq(x-y)} \delta(q^2 - \mu^2) = \\
&= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q_0) e^{-iq(x-y)} \delta(q^2 - \mu^2) = \\
&= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) i\Delta_+(x-y; \mu^2)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Conseguenze della scomposizione spettrale: la funzione a due punti è necessariamente singolare per $x = y$, perché sappiamo che $\Delta_+(x-y)$ diverge

in zero. Questo avviene anche in presenza di interazione. Le singolarità non posso compensarsi poiché ρ è definita positiva.

5.2 Teorema spin-statistica

La relazione fra spin e statistica può essere dedotta dalla funzione a due punti nella seguente forma:

- gli operatori bosonici non sono quantizzabili tramite anticommutatori.
- gli operatori fermionici non sono quantizzabili tramite commutatori.

Mostriamo l'evidenza della prima affermazione perché abbiamo visto la scomposizione spettrale solo per operatori scalari. Abbiamo:

$$\langle 0 | [O(x), O(y)] | 0 \rangle = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \{i\Delta_+(x-y; \mu^2) - i\Delta_+(y-x; \mu^2)\} \quad (5.8)$$

La distribuzione fra parentesi è ben nota: è il commutatore di un campo scalare libero. Questo commutatore si annulla per distanze di tipo spazio grazie alla compensazione dei due termini, e non perché si annullano entrambi i termini. Se scegliessimo di quantizzare la teoria tramite anticommutatori, violeremmo automaticamente il principio di località, perché per intervalli di tipo spazio (e in particolare a tempi uguali) avremmo la somma di due termini non nulli e un risultato ben diverso da zero.

5.3 Funzione a due punti e spettro di massa

Lo studio delle funzioni a due punti è utile perché queste contengono informazione sullo spettro di massa. Sappiamo che $\rho(\mu^2)$ ha uno supporto che contiene lo spettro degli stati fisici: dunque per $\mu^2 \leq 0$ è nulla. Se supponiamo che $\langle 0 | O(0) | \widetilde{p} \rangle \neq 0$, cioè che l'operatore O connetta gli stati di singola particella al vuoto, possiamo caratterizzare lo spettro di singola particella. Studiamo infatti la scomposizione spettrale nell'intervallo $0 < \mu^2 < 4m^2$ limitandoci a considerare gli stati di singola particella:

$$\frac{\theta(q_0) \rho(q^2)}{(2\pi)^3} = \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} |\langle 0 | O(0) | \widetilde{p} \rangle|^2 \delta^4(q-p) \quad (5.9)$$

La funzione $F(\mathbf{p}) = \langle 0 | \widetilde{O(0)} | \widetilde{p} \rangle$ dev'essere una costante per l'invarianza relativistica, essendo $\langle 0 | O(0) | p \rangle = \langle 0 | O(0) | \Lambda p \rangle$. La scriviamo nella forma:

$$\langle 0 | O(0) | \widetilde{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z_O}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (5.10)$$

Notiamo che questo non sarebbe stato vero se non avessimo usato una normalizzazione covariante. . . agendo in questo modo infatti scompaiono tutti i fattori banali $\sqrt{2\omega_p}$. Inserendo la 5.10 nella 5.9 abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\theta(q_0) \rho(q^2)}{(2\pi)^3} &= \frac{Z_O}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} \delta^4(q - p) = \\ &= \frac{Z_O}{(2\pi)^3} \int d^4 p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \delta^4(q - p) = \\ &= \frac{Z_O}{(2\pi)^3} \theta(q_0) \delta(q^2 - m^2) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ne deduciamo che $\rho(q^2) = Z_O \delta(q^2 - m^2)$. Questo è un calcolo esatto e tutta l'interazione è sepolta nel valore di Z_O . Nella scomposizione spettrale posso separare un pezzo relativo al contributo di singola particella da tutto il resto:

$$\langle 0 | O(x) O(y) | 0 \rangle = Z_O i\Delta_+(x - y; m^2) + \int_{4m^2}^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) i\Delta_+(x - y; \mu^2) \quad (5.12)$$

Calcoliamo ora il T-prodotto:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{O(x)O(y)\} | 0 \rangle &= \langle 0 | \theta(x^0 - y^0)O(x)O(y) + \theta(y^0 - x^0)O(y)O(x) | 0 \rangle = \\ &= Z_O i\Delta_F(x - y; m^2) + \int_{4m^2}^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) i\Delta_F(x - y; \mu^2) \end{aligned} \quad (5.13)$$

La sua trasformata di Fourier è:

$$\frac{i Z_O}{q^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} d\mu^2 \frac{\rho(\mu^2)}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (5.14)$$

Vediamo dunque che calcolare i poli del T-prodotto permette di ottenere i valori delle masse fisiche. Per farlo possiamo usare in partenza qualsiasi operatore, poiché solo la costante Z_0 dipende da esso e non la posizione del polo. Ad esempio in una teoria con elettrone e protone posso usare l'operatore di creazione di queste due particelle per calcolare la loro massa e l'operatore e^+p^+ per calcolare la massa dell'atomo di idrogeno nel suo stato stabile. Non ha importanza che lo stato sia composto o meno, questo formalismo permette di accedere a tutto lo spettro degli stati stabili. Naturalmente la difficoltà è insita nel calcolo della funzione a due punti o, equivalentemente, del T-prodotto.

5.4 Singolarità e distribuzioni

Abbiamo già osservato come le funzioni a due punti siano singolari; inoltre nel T-prodotto queste sono anche moltiplicate per funzioni θ singolari nello stesso punto. Per evitare problemi di divergenza e infiniti dobbiamo dunque fare una digressione matematica. Queste quantità non devono essere interpretate come semplici funzioni ma come distribuzioni. Le distribuzioni sono funzionali lineari su uno spazio di funzioni-prova. Le distribuzioni costituiscono un ampliamento del concetto di funzione. Data una qualsiasi funzione $D(x)$, questa può essere pensata come una distribuzione tramite gli integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x)f(x) dx \quad (5.15)$$

su tutto l'insieme delle funzioni prova $f(x)$. Possiamo eseguire tutte le operazioni che eseguiamo sulle normali funzioni, come ad esempio calcolare la derivata di una distribuzione. Chiaramente esistono anche distribuzioni non associabili a semplici funzioni, come la delta di Dirac.

Esempio. Calcolo della derivata distribuzionale $D \log|x|$, la parte intera di $1/|x| \dots$

Qualsiasi funzione è derivabile infinite volte nel senso delle distribuzioni; tuttavia se ci troviamo davanti al prodotto di più singolarità nello stesso punto, ad esempio se consideriamo la distribuzione $\theta(x)\mathcal{P}(1/x)$ possiamo incontrare dei problemi, perché l'integrale sulla funzione di prova non è sufficiente ad eliminare le singolarità. Questa è proprio la situazione antipatica

che si verifica in teoria dei campi nei T-prodotti e che risolveremo in seguito. Per quanto riguarda lo spazio delle funzioni-prova, scegliamo lo spazio delle funzioni temperate (scartando l'opzione delle funzioni a supporto compatto). Questo spazio ha infatti la caratteristica di assicurare l'esistenza della trasformata di Fourier. Inoltre la trasformata di Fourier di una funzione temperata è anch'essa una funzione temperata (teorema di Riemann-Lebesgue). Questo ci permette di dare un senso alla definizione di trasformata di Fourier distribuzionale: data $D(x)$, questa è la funzione $\tilde{D}(k)$ tale che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{D}(k) f(k) \, dk = \int_{-\infty}^{\infty} D(x) f(x) \, dx \quad (5.16)$$

In teoria dei campi, gli operatori devono essere interpretati piuttosto come distribuzioni a valori operatoriali. D'altronde questo risulta evidente già dalle regole di commutazione canoniche 1.5 dove compare la distribuzione delta di Dirac. La scrittura è simbolica: $\phi(x)$ non è un operatore, lo è la quantità:

$$\phi_f(x^0) = \int d^3 x f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, x^0) \quad (5.17)$$

Notiamo che l'integrazione è eseguita solo sulle tre coordinate spaziali e non su tutto lo spazio-tempo. Questo è dovuto proprio alla forma delle regole di commutazione canonica, che sono scritte a tempi uguali. In questo modo, infatti, date due funzioni di prova f, g e le regole 1.5, per le regole di commutazione otteniamo:

$$\begin{cases} [\phi_f(x^0), \phi_g(x^0)] = 0 \\ [\dot{\phi}_f(x^0), \dot{\phi}_g(x^0)] = 0 \\ [\dot{\phi}_f(x^0), \phi_g(x^0)] = -i \int d^3 x d^3 y f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -i \int d^3 x f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (5.18)$$

Se avessimo utilizzato per i nostri operatori non una media spaziale (i.e. un'integrazione sulle tre dimensioni) ma spazio-temporale, le regole di commutazione essendo a tempi uguali (e dunque contenendo solo la delta di Dirac 3-dimensionale) avrebbero restituito due integrazioni separate sul tempo per le due funzioni f, g , che dipendono dalla dinamica. Dunque gli operatori sono ben definiti tramite medie spaziali. In effetti le medie spaziali per il campo libero forniscono degli operatori sensati. Questa situazione riflette l'osservazione secondo la quale nessun campo può essere misurato puntualmente, neanche classicamente. La teoria delle distribuzioni emerge in fisica

per rendere conto di questo fatto. D'altro canto c'è un'argomentazione di forte plausibilità che rende preferibile la formulazione della teoria dei campi mediante l'integrale funzionale piuttosto che tramite il formalismo canonico, ed è una questione di convergenza che ora esponiamo. Utilizzando la somma di completezza e l'invarianza per traslazioni, abbiamo già visto che possiamo scrivere la funzione a due punti nel seguente modo:

$$\langle 0 | O(x) O(y) | 0 \rangle = \sum_n |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 e^{-ip_n x} e^{ip_n y} \quad (5.19)$$

Integriamo ora questa espressione su due funzioni di prova f, g , prima solo in tre e poi in quattro dimensioni. Otterremo allora nei due casi le quantità:

- $\sum_n |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 e^{-iE_n(x^0 - y^0)} \tilde{f}(\mathbf{p}_n) \tilde{g}(\mathbf{p}_n)$
- $\sum_n |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 \tilde{f}(p_n) \tilde{g}(p_n)$

Ora, mentre la presenza delle due trasformate di Fourier è rassicurante, poiché sappiamo che decrescono rapidamente per grandi impulsi, nel primo caso, dato lo spettro di massa di una teoria con mass gap che non esclude la presenza di stati di energia arbitraria anche per impulsi piccoli, non possiamo essere sicuri della convergenza della serie, proprio per la presenza del fattore esponenziale. Dunque se mi trovassi a maneggiare un'operatore O che connette con il vuoto stati a più particelle, l'integrazione spaziale potrebbe fallire e portare ad infiniti. Questo non avviene integrando in quattro dimensioni, dove la convergenza è assicurata. In 4-d non esistono teorie interessanti per le quali il formalismo canonico funzioni!

6 Teorema del limite asintotico

Vogliamo cominciare a vedere in che modo conoscendo tutti i T-prodotti fra gli operatori locali possiamo risalire agli elementi della matrice S , che in definitiva sono ciò che noi richiediamo dalla teoria. Abbiamo introdotto le basi IN e OUT e i rispettivi operatori di creazione e distruzione. Tramite di essi possiamo costruire i campi IN e OUT; ad esempio:

$$\phi^{(in)}(x) = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} \{ \tilde{a}_p^{(in)} e^{-ipx} + \text{h.c.} \} \quad (6.1)$$

Per costruzione questi sono campi liberi (ad esempio nel caso scalare il campo appena scritto sarà soluzione dell'equazione di Klein-Gordon). Tuttavia a ben guardare non sono campi locali: infatti commutano con sé stessi per distanze di tipo spazio ma non con i relativi campi OUT o con i campi presenti nella lagrangiana, soluzioni delle equazioni del moto da essa ricavabili.

In teoria dei campi la questione dello scattering è complicata perché l'interazione che genera il processo di diffusione fra particelle è la stessa che determina le proprietà intrinseche di queste ultime. Per questo si parla del cosiddetto spegnimento adiabatico, l'annullamento all'infinito delle costanti di accoppiamento. L'autointerazione tuttavia non scompare mai. Facciamo il semplice esempio di un campo scalare che obbedisce all'equazione del moto $\square\phi(x) = \rho(x)$. La soluzione, sappiamo, è la combinazione della soluzione dell'equazione omogenea e di una soluzione particolare:

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int d^4 y G(x-y)\rho(y) \quad (6.2)$$

La scelta della funzione di Green è collegata alle condizioni iniziali. Se pensiamo in termini di processi di diffusione, dobbiamo riflettere sul caso in cui la sorgente $\rho(x)$ si accende ad un certo punto e per un certo intervallo spazio-temporale. In questo caso è opportuno l'utilizzo di una funzione di Green ritardata. D'altro canto caratteristica di questa situazione è la condizione:

$$\phi(x) \xrightarrow{x^0 \rightarrow \pm\infty} \phi_0(x) \quad (6.3)$$

Analogamente anche per gli operatori locali in teoria dei campi vale una tale condizione:

$$\begin{cases} \text{O}(x) \xrightarrow{x^0 \rightarrow -\infty} \phi^{(in)}(x) \\ \text{O}(x) \xrightarrow{x^0 \rightarrow +\infty} \phi^{(out)}(x) \end{cases} \quad (6.4)$$

A questo limite va tuttavia dato un senso poiché i campi IN e OUT dipendono da x^0 e contemporaneamente sono qui sibili come il risultato di un limite ad infinito della stessa variabile. Così come per l'equazione di Schrödinger, anche alle soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon è associata una nozione di unitarietà, legata al prodotto scalare:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = i \int d^3 x \phi_1(\mathbf{x}, x^0) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_2(\mathbf{x}, x^0) \quad (6.5)$$

che è conservato nel tempo. Notiamo che questo prodotto non è definito positivo e non ha quindi un'interpretazione probabilistica. Questo prodotto scalare può essere utilizzato per generare gli operatori di creazione e distruzione. Infatti se prendiamo la base di onde piane:

$$f_p(x) = \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} \quad (6.6)$$

che è completa considerando anche le coniugate f_p^* e che ha la seguente normalizzazione:

$$\begin{cases} \langle f_{p_1}, f_{p_2} \rangle = - \langle f_{p_1}^*, f_{p_2}^* \rangle = \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ \langle f_{p_1}^*, f_{p_2} \rangle = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

abbiamo:

$$\begin{cases} \langle f_p, \phi^{(in)} \rangle = a_p^{(in)} \\ \langle f_p, \phi^{(in)} \rangle^\dagger = a_p^{(in)\dagger} \end{cases} \quad (6.8)$$

Con lo stesso procedimento possiamo ottenere funzioni d'onda diverse dalle onde piane, che rappresentano solo un limite teorico per lo stato di una particella coinvolta in un processo di diffusione. In questo caso poiché la funzione d'onda non sarà soluzione dell'equazione di Klein-Gordon, il prodotto scalare introdotto per l'unitarietà di quest'ultima fornirà un risultato dipendente dal tempo. È in questo senso che dobbiamo intendere il limite: data una funzione f qualsiasi soluzione dell'equazione di Klein-Gordon⁵, invece di considerare l'operatore O consideriamo $O_f = \langle f, O \rangle$, che dipende dal tempo, e invece di $\phi^{(in)}$ consideriamo $\phi_f^{(in)}$, che è costante nel tempo. Allora avremo un limite scritto in maniera ragionevole:

$$O_f(x^0) \xrightarrow{x^0 \rightarrow -\infty} \phi_f^{(in)} \quad (6.9)$$

In realtà a causa dell'autointerazione l'unica possibilità è di avere un limite debole, ovvero:

⁵per lo stesso valore della massa del campo ϕ .

$$\langle \alpha | O_f(x^0) | \beta \rangle \xrightarrow{x^0 \rightarrow -\infty} C_O \langle \alpha | \phi_f^{(in)} | \beta \rangle \quad (6.10)$$

L'esistenza di questo limite per qualsiasi operatore locale in una teoria di campo con mass gap, che costituisce il teorema del limite asintotico, fu dimostrata da Haag nel 1958. La dimostrazione è lunga e complicata e la lasciamo perdere. Vogliamo però far vedere tramite un esempio che la costante C_O altri non è che la vecchia $\sqrt{Z_O}$. Scegliamo $|\alpha\rangle = |0\rangle, |\beta\rangle = |\widetilde{p}\rangle$: il membro a sinistra della 6.10 sarà:

$$\begin{aligned} \langle 0 | O_f(x^0) |\widetilde{p}\rangle &= i \int d^3 x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle 0 | O(x) |\widetilde{p}\rangle = \\ &= i \int d^3 x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-ipx} \langle 0 | O(0) |\widetilde{p}\rangle = \\ &= \frac{i\sqrt{Z_O}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-ipx} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Essendoci nell'integrale un'onda piana che è soluzione dell'equazione di Klein-Gordon, come sappiamo l'integrale è costante nel tempo e dunque l'espressione rimane inalterata nel limite per $x^0 \rightarrow \pm\infty$. Il membro a destra della 6.10 sarà inoltre:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi_f^{(in)}(x^0) |\widetilde{p}\rangle &= i \int d^3 x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle 0 | \phi_f^{(in)}(x^0) |\widetilde{p}\rangle = \\ &= i \int d^3 x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dal confronto si deduce che $C_O = \sqrt{Z_O} = (2\pi)^{3/2} \langle 0 | O(0) |\widetilde{p}\rangle$. Possiamo riscrivere meglio il teorema nella seguente espressione:

$$\lim_{x^0 \rightarrow \pm\infty} \langle \alpha | O_f(x^0) | \beta \rangle = \sqrt{Z_O} \langle \alpha | \phi_f^{(out/in)} | \beta \rangle \quad (6.13)$$

7 Formule di riduzione

Vediamo come il teorema del limite asintotico e i T-prodotti sono collegati al calcolo degli elementi di matrice S . Consideriamo lo scattering $q_1 + q_2 \rightarrow$

$p_1 + p_2$ con $q_1, q_2 \neq p_1, p_2$ ⁶. Useremo inoltre pacchetti d'onda centrati sugli impulsi, come si fa per gli esperimenti reali, per poter sfruttare la loro localizzazione nello spazio nel calcolo. Ricordiamo poi che la matrice S contiene nel suo sviluppo l'identità, che è il contributo della teoria libera e va sottratta. Cominciamo il calcolo:

$$\langle q_1, q_2 \text{ out} | p_1, p_2 \text{ in} \rangle = \langle q_1, q_2 \text{ out} | a_{p_1}^{(in)\dagger} | p_2 \text{ in} \rangle - \langle q_1, q_2 \text{ out} | a_{p_1}^{(out)\dagger} | p_2 \text{ in} \rangle = \dots \quad (7.1)$$

... non abbiamo cambiato nulla sottraendo il secondo termine che è in realtà nullo; utilizziamo ora le relazioni 6.8 per i due operatori di creazione e distruzione ...

$$\dots = i \int d^3 x f_{p_1}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2 \text{ out} | \phi^{(out)}(x) - \phi^{(in)}(x) | p_2 \text{ in} \rangle = \dots \quad (7.2)$$

... applichiamo quindi il teorema del limite asintotico introducendo un'operatore O che abbia elementi di matrice non nulli fra il vuoto e gli stati di singola particella ...

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \left(\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3 x f_{p_1}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2 \text{ out} | O(x) | p_2 \text{ in} \rangle = \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4 x \partial_0 \left\{ f_{p_1}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2 \text{ out} | O(x) | p_2 \text{ in} \rangle \right\} = \dots \end{aligned} \quad (7.3)$$

... abbiamo adoperato un trucco inserendo il limite dentro l'integrale; dobbiamo ricordarci che in questo caso i contributi al bordo forniscono tutto il contributo dell'integrale temporale e dunque non possiamo più eliminarli quando integriamo per parti come facciamo solitamente. Inoltre $\partial_0 \{ f \partial_0 O - O \partial_0 f \} = f \partial_0^2 O - \partial_0^2 f O \dots$

$$\dots = \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4 x \left\{ f_{p_1}(x) \partial_0^2 \langle \dots O(x) \dots \rangle - \partial_0^2 f_{p_1}(x) \langle \dots O(x) \dots \rangle \right\} = \dots \quad (7.4)$$

⁶questa è un'ipotesi molto ragionevole: anche nel caso di scattering in avanti infatti il calcolo viene eseguito come un limite.

... notiamo che se ora integrassimo per parti eliminando come siamo soliti i contributi al bordo otterremmo zero! Contuiamo sapendo che f_{p_1} è soluzione dell'equazione di Klein-Gordon dunque $\partial_0^2 f_{p_1} = (\Delta - m^2) f_{p_1} \dots$

$$\dots = \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4 x \{ f_{p_1}(x) \partial_0^2 \langle \dots \rangle - (\Delta - m^2) f_{p_1}(x) \langle \dots \rangle \} = \dots \quad (7.5)$$

...l'operatore $\Delta - m^2$ può invece essere integrato tranquillamente per parti perché coinvolge solo le derivate spaziali e in questo caso non ho contributi al bordo! Otteniamo quindi l'operatore di Klein-Gordon $K_x = \square - m^2$ che agisce su $O \dots$

$$\dots = \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4 x \{ f_{p_1}(x) K_x \langle q_1, q_2 \text{ out} | O(x) | p_2 \text{ in} \rangle \} \quad (7.6)$$

In questo modo abbiamo operato la prima riduzione. Notiamo che:

- non possiamo integrare per parti e spostare l'operatore K_x su f_{p_1} .
- possiamo inserire qualsiasi operatore locale al posto di O ; questo ci ricorda inoltre che i campi IN e OUT non sono locali altrimenti otterremmo un risultato nullo dall'espressione essendo questi soluzione di Klein-Gordon.

Ora dobbiamo proseguire con le riduzioni successive, con la novità che stavolta ci troviamo dentro un elemento di matrice diverso. Quindi ripartiamo da $\langle q_1, q_2 \text{ out} | O(x) | p_2 \text{ in} \rangle$ tralasciando per il momento l'integrale. Questa volta contraiamo un particella uscente.

$$\begin{aligned} &= \langle q_1, q_2 \text{ out} | O(x) | p_2 \text{ in} \rangle = \langle q_2 \text{ out} | a_{q_1}^{(out)} O(x) | p_2 \text{ in} \rangle - \langle q_2 \text{ out} | O(x) a_{q_1}^{(in)} | p_2 \text{ in} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z_O}} \left\{ \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} \langle q_2 \text{ out} | O_{f_{q_1}}(y^0) O(x) | p_2 \text{ in} \rangle - \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \langle q_2 \text{ out} | O(x) O_{f_{q_1}}(y^0) | p_2 \text{ in} \rangle \right\} = \dots \end{aligned} \quad (7.7)$$

... abbiamo utilizzato ancora il teorema del limite asintotico per lo stesso operatore O ; questo per semplicità, perché avremmo potuto tranquillamente introdurre un secondo operatore locale. Per ripercorrere gli stessi passaggi di prima vorremmo raccogliere insieme i due limiti, ma non possiamo farlo essendo invertiti gli operatori. Dobbiamo trovare una combinazione adeguata

per il loro prodotto, e questa potrebbe essere proprio il T-prodotto! Non ci facciamo spaventare dalla presenza delle funzioni θ perché data la presenza del limite siamo sensibili solo a quanto avviene all'infinito; potremmo anche pensare di sostituirle con delle funzioni continue con lo stesso andamento all'infinito. Dunque inseriamo il T-prodotto e poi eseguiamo gli stessi passaggi di prima...

$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \left(\lim_{y^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \right) \langle q_2 \text{ out} | T \{ O_{f_{q_1}}(y^0) O(x) \} | p_2 \text{ in} \rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \int d^4 y \partial_y^0 \left\{ f_{q_1}^*(y) \overleftrightarrow{\partial}_y^0 \langle q_2 \text{ out} | T \{ O(y) O(x) \} | p_2 \text{ in} \rangle \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \int d^4 y \left\{ f_{q_1}^*(y) \partial_0^2 - \partial_0^2 f_{q_1}^*(y) \right\} \langle q_2 \text{ out} | T \{ O(y) O(x) \} | p_2 \text{ in} \rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \int d^4 y f_{q_1}^*(y) K_y \langle q_2 \text{ out} | T \{ O(y) O(x) \} | p_2 \text{ in} \rangle
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Da questo punto in poi le contrazioni delle particelle coinvolte nell'elemento di matrice continuano allo stesso modo; l'unica differenza fra particelle finali e iniziali è la coniugazione o meno di f . Come risultato finale si ottiene:

$$\begin{aligned}
\langle q_1, q_2 \text{ out} | p_1, p_2 \text{ in} \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{Z_0}} \right)^4 \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 f_{p_1}(x_1) \dots f_{q_2}^*(x_4) \cdot \\
&\quad \cdot K_{x_1} \dots K_{x_4} \langle 0 | T \{ O(x_1) \dots O(x_4) \} | 0 \rangle \tag{7.9}
\end{aligned}$$

7.1 T-prodotti

Le formule di riduzione collegano il calcolo degli elementi di matrice a quello di T-prodotti fra operatori locali. La definizione di questo prodotto presenta delle insidie: non è esplicitamente invariante di Lorentz. La seguente argomentazione:

- per distanze di tipo tempo, una trasformazione di Lorentz non cambia l'ordinamento temporale, dunque il T-prodotto è invariante;
- per distanze di tipo spazio, gli operatori locali commutano, dunque il T-prodotto è ancora invariante.

è sostanzialmente corretta, ma non tecnicamente. Vedremo che possiamo avere una violazione proprio nel punto di singolarità e vedremo come rimuovere questo ostacolo matematico modificando in maniera innocua la definizione di T-prodotto. Per cominciare prendiamo in considerazione le funzioni di Wightman $\Delta_{AB}(x) = \langle 0|A(x)B(0)|0\rangle$. Queste distribuzioni, si può verificare facilmente, sono L-invarianti:

$$\Delta_{AB}(x) = \langle 0|A(x)B(0)|0\rangle = \langle 0|A(\Lambda x)B(0)|0\rangle = \Delta_{AB}(\Lambda x) \quad (7.10)$$

Questa condizione può essere messa in un'utile forma differenziale se consideriamo trasformazioni di Lorentz infinitesime: $\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \epsilon_\nu^\mu$ con ϵ tensore antisimmetrico. Poniamo $\Delta_{AB}(x^\mu) = \Delta_{AB}(x^\mu + \epsilon_\nu^\mu x^\nu)$ e sviluppiamo al prim'ordine:

$$\Delta_{AB}(x^\mu) + \partial_\mu \Delta_{AB}(x^\mu) \epsilon^{\mu\nu} x_\nu = \Delta_{AB}(x^\mu) \rightarrow \partial_\mu \Delta_{AB}(x^\mu) \epsilon^{\mu\nu} x_\nu = 0 \quad (7.11)$$

Poiché $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ otteniamo la relazione:

$$7.1 (x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) \Delta_{AB}(x) = 0 \quad (7.12)$$

che esprime in forma differenziale la condizione di invarianza di Lorentz delle funzioni di Wightman. Ora, il T-prodotto altro non è che una combinazione di funzioni di Wightman con l'aggiunta delle funzioni θ :

$$\langle 0|T\{A(x)B(0)\}|0\rangle = \theta(x^0)\Delta_{AB}(x) + \theta(-x^0)\Delta_{BA}(x) \quad (7.13)$$

Questa definizione può dare dei problemi sotto trasformazioni di Lorentz perché il segno di x^0 non è invariante se x è di tipo spazio. Apparentemente sono salvo invece per vettori di tipo tempo. Ma vediamo cosa avviene matematicamente se applichiamo la condizione. Se scegliamo μ, ν come indici spaziali, sostanzialmente otteniamo un operatore momento angolare e la conseguente invarianza del T-prodotto sotto rotazioni spaziali. Infatti le derivate sotto indici spaziali non vanno a toccare la funzione $\theta(x^0)$. Più delicato è il discorso per i boost: proviamo a scegliere $\mu = 0, \nu = i$:

$$\begin{aligned} & (x_0 \partial_i - x_i \partial_0) [\theta(x^0)\Delta_{AB}(x) + \theta(-x^0)\Delta_{BA}(x)] = \\ & = -x_i \delta(x^0)\Delta_{AB}(x) - x_i \delta(-x^0)\Delta_{BA}(x) = \\ & = -x_i \delta(x^0) \langle 0|[A(x), B(0)]|0\rangle \end{aligned} \quad (7.14)$$

Sto moltiplicando due distribuzioni singolari nello stesso punto, la delta di Dirac e i commutatori a tempi uguali. Il problema chiaramente si ha solamente per $x = 0$ perché sappiamo che i commutatori canonici, per la località, possono essere diversi da zero solo in un punto. Questo, si può dimostrare, li forza a essere o delte di Dirac o derivate di questa. Chiaramente il valore del commutatore dipende dalla scelta di A e B , ma possiamo fare qualche modellino: ponendo ad esempio $\langle 0 | [A(0, \mathbf{x}), B(0)] | 0 \rangle = c\delta(\mathbf{x})$ si ottiene

$$-x_i\delta(x^0) \langle 0 | [A(x), B(0)] | 0 \rangle = -x_i\delta(x^0)\delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (7.15)$$

essendo la distribuzione $x\delta(x)$ identicamente nulla. Dunque in questo caso non abbiamo problemi. Dobbiamo esplorare il caso della derivata della delta di Dirac; dobbiamo scegliere una combinazione di derivate invariante per rotazioni: il laplaciano. Ponendo $\langle 0 | [A(0, \mathbf{x}), B(0)] | 0 \rangle = c\Delta\delta(\mathbf{x})$ otteniamo come risultato la distribuzione $-x_i\delta(x^0)\Delta\delta(\mathbf{x})$ che non è identicamente nulla! Per analizzarla meglio, partiamo dall'identità $x_i\delta(\mathbf{x}) = 0$ e applichiamo due volte l'operatore derivata per riprodurre il laplaciano $\Delta = \partial_j\partial^j$:

- $\partial_j (x^i\delta(\mathbf{x})) = \delta_j^i\delta(\mathbf{x}) + x^i\partial_j\delta(\mathbf{x}) = 0$
- $\partial^l\partial_j (x^i\delta(\mathbf{x})) = 2\partial^i\delta(\mathbf{x}) - x^i\Delta\delta(\mathbf{x}) = 0$

Si ricava che: $x^i\Delta\delta(\mathbf{x}) = 2\partial^i\delta(\mathbf{x}) \neq 0$. Ho una violazione dell'invarianza di Lorentz nel punto di singolarità $x = 0$. Questo avviene anche se considero ordini successivi delle derivate. Il problema si può risolvere modificando la definizione del T-prodotto in maniera tale da lasciare inalterata la fisica ma rimuovendo allo stesso tempo questi problemi tecnici. Definiamo allora il T*-prodotto come:

$$\langle 0 | T^*\{A(x)B(0)\} | 0 \rangle = \langle 0 | T\{A(x)B(0)\} | 0 \rangle + \alpha\delta'(x^0)\delta(\mathbf{x}) \quad (7.16)$$

Abbiamo modificato la definizione introducendo una componente aggiuntiva che è diversa da zero solo nel punto di singolarità. Il suo ruolo è quello di fornire le giuste compensazioni ai termini non-invarianti e sparire portandosi dietro. Infatti abbiamo:

$$\begin{aligned} (x_0\partial_i - x_i\partial_0) \langle 0 | T^*\{A(x)B(0)\} | 0 \rangle &= -2c\delta(x^0)\partial_i\delta(\mathbf{x}) + \alpha x^0\delta'(x^0)\partial_i\delta(\mathbf{x}) = \\ &= -(2c + \alpha)\delta(x^0)\partial_i\delta(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (7.17)$$

purché si ponga $\alpha = -2c$. Ricordiamo che $x^0\delta'(x^0) = -\delta(x^0)$. Naturalmente abbiamo infiniti modi di definire in maniera corretta questi T*-prodotti. Ma tutta questa arbitrarietà da fastidio alla fisica? Non è che cambiano le osservabili modificando il T-prodotto in questo modo? Il rischio è che in poli della trasformata di Fourier si spostino cambiando così lo spettro di massa della teoria. Ma questo non è possibile perché le modifiche riguardano esclusivamente termini aggiuntivi con supporto in zero, e che dunque nello spazio di Fourier sono costanti e non posso incidere sulla posizione dei poli. Naturalmente le cose cambierebbero se aggiungessi una serie infinita di questi termini, ma questo non è possibile perché esiste un teorema che assicura che solo combinazioni finite di delte di Dirac e sue derivate possono costruire distribuzioni con supporto in zero. Neanche sulle formule di riduzione ho ripercussione, perché inserendo un termine concentrato in zero all'integrale 7.9 posso tranquillamente integrare per parti, scaricare l'operatore di Klein-Gordon su una delle funzioni f o f^* ottenendo un contributo nullo per tale termine aggiuntivo.

8 Metodo dell'integrale funzionale in teoria dei campi

Il metodo degli integrali funzionali permette di calcolare i T-prodotti senza dover utilizzare le regole di commutazione canoniche. Nel formalismo lagrangiano una teoria è identificata dall'azione $S = \int d^4x L$ e dalla lagrangiana. Ad esempio:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m_0^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda_0}{4}\phi^4 \quad (8.1)$$

Data una teoria interessante possiamo compendiare tutti i T-prodotti nel funzionale generatore $Z(J)$

$$Z(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle J(x_1) \dots J(x_n) \quad (8.2)$$

generandoli tramite derivate funzionali opportune:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z(J)}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (8.3)$$

Il funzionale generatore esiste per i T-prodotti poiché questi sono simmetrici e anche le derivate funzionali lo sono per il teorema di Schwarz. Questo è il motivo per cui non si può elaborare un metodo funzionale per le funzioni di Wightman ed anche del perché i fermioni richiedano una trattazione profondamente modificata basata sulle variabili di Grassmann. L'importanza del funzionale generatore consiste nel fatto che Dirac e Feynman si accorsero che poteva essere risolto alle quadrature. Ovvero:

$$Z(J) = \int \delta\phi \exp \left\{ iS(\phi) + i \int d^4x J(x)\phi(x) \right\} \quad (8.4)$$

Formalmente questo oggetto soddisfa le equazioni del moto incluse le regole di commutazione. Inoltre dà una giustificazione del principio di minima azione e del limite classico della meccanica quantistica (principio della fase stazionaria). Per questi motivi ci piacerebbe molto usarlo, tuttavia così com'è scritto non ha senso operativo e non è neanche definito. In sostanza non esiste, perché abbiamo un integrale ∞ -dimensionale e per di più non convergente. Affronteremo ora i due problemi separatamente.

8.1 Rotazione di Wick e spazio euclideo

Consideriamo un integrale analogo nella forma al funzionale 8.4 ma unidimensionale:

$$\int dx e^{ix^2} = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \quad (8.5)$$

Come si giunge a tale risultato? Facendo un prolungamento analitico $a \rightarrow a e^{i\theta}$ dall'asse reale, sul quale sappiamo ben risolvere gli integrali gaussiani, al piano complesso. Questo ci permette di discernere la giusta radice complessa da scegliere, quella corrispondente al valore di θ che nel limite $\theta \rightarrow 0$ riconduce al valore giusto dell'integrale gaussiano reale. Nel caso di un integrale funzionale l'analogo del prolungamento analitico è la cosiddetta rotazione di Wick, che ci fa passare ad un tempo complesso. Partiamo dall'osservare, seguendo un ragionamento di Schwinger, che i T-prodotti possono

essere prolungati ad un tempo complesso migliorando la loro convergenza: ponendo $x^0 > y^0$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \\
& = \sum_n \langle 0 | e^{iHx^0} \phi(\mathbf{x}, 0) e^{-iHx^0} | n \rangle \langle n | e^{iHy^0} \phi(\mathbf{y}, 0) e^{-iHy^0} | n \rangle = \\
& = \sum_n \langle 0 | \phi(\mathbf{x}, 0) | n \rangle \langle n | \phi(\mathbf{y}, 0) | 0 \rangle e^{-iE_n(x^0 - y^0)}
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Notiamo che il segno dell'esponente sarebbe rimasto immutato avessimo scelto $y^0 > x^0$, chiaramente con il dovuto ordinamento. Facciamo ora un prolungamento analitico $x^0 \rightarrow x^0 e^{i\theta}$, $y^0 \rightarrow y^0 e^{i\theta}$. Otteniamo:

$$\sum_n \langle 0 | \phi(\mathbf{x}, 0) | n \rangle \langle n | \phi(\mathbf{y}, 0) | 0 \rangle e^{-iE_n(x^0 - y^0) \cos \theta} e^{E_n(x^0 - y^0) \sin \theta} \tag{8.7}$$

Per $\sin \theta < 0$, ovvero per $\theta < 0$, la modifica migliora sensibilmente la convergenza della serie, infatti otteniamo un esponenziale decrescente. Ma insistiamo su questa strada scegliendo un tempo puramente immaginario, ovvero $\theta = -\pi/2$. Questo equivale al cambio di variabile $x^0 \rightarrow -ix^0$. Si ha:

$$\sum_n \langle 0 | \phi(\mathbf{x}, 0) | n \rangle \langle n | \phi(\mathbf{y}, 0) | 0 \rangle e^{-E_n(x^0 - y^0)} \tag{8.8}$$

Questa qui non è la funzione di Green vera e propria, ma un suo prolungamento analitico. Tuttavia conterrà esattamente le stesse informazioni. Vediamo come funziona questo trucco nella teoria libera, della quale sappiamo già tutto. Abbiamo il propagatore di Feynman:

$$i\Delta_F(x - y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{\mathcal{F}} d^4 p \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 - \omega_p^2} \tag{8.9}$$

Ci interessa la parte temporale: proviamo a fare il prolungamento analitico nell'integrale in dp^0 :

$$i \int_{\mathcal{F}} dp^0 \frac{e^{ip^0(x-y^0)} e^{i\theta}}{p^{02} - m^2} \tag{8.10}$$

Agendo in maniera così diretta si provoca un disastro, perché l'integrale diverge per qualsiasi valore di θ . Dobbiamo fare il prolungamento in maniera

tale da mantenere immaginario l'esponente. Dobbiamo aggiungere una fase anche a p^0 cambiando in maniera opportuna il cammino di integrazione contemporaneamente ad x^0 :

$$\begin{cases} x^0 \rightarrow x^0 e^{i\theta} \\ \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_\theta \end{cases} \quad (8.11)$$

Dobbiamo fare in modo che p^0 acquisti una fase $e^{-i\theta}$ che compensi quella opposta di x^0 e lasci invariato l'esponente. Questo può avvenire anche in questo caso solo per $\theta < 0$, cosicché la rotazione antioraria di angolo positivo $-\theta$ permette al cammino di Feynman ruotato di non attraversare le singolarità situate in $p^0 = \pm\omega_p$ sull'asse reale. Per $\theta = -\pi/2$ abbiamo $p^0 \rightarrow ip^0$. L'integrale 8.11 diventa allora:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 \frac{e^{ip^0(x^0-y^0)}}{-p^0 - \omega_p^2} \quad (8.12)$$

Con la sostituzione $p^0 \rightarrow ip^0$ la norma minkowskiana ritorna ad essere euclidea. Nel cosiddetto prolungamento euclideo il propagatore si scrive:

$$i\Delta_F^{(Eu)}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_E(x-y)}}{p_E^2 + m^2} \quad (8.13)$$

Il prodotto fra quadrivettori deve essere pensato come quello usuale euclideo; ad esempio $p_E^2 = p^{0^2} + \mathbf{p}^2$. Le singolarità inoltre sono scomparse vista la comparsa del segno più a denominatore; questo è normale visto che stiamo integrando sull'asse immaginario! La prescrizione di Feynman per il cammino di integrazione è l'unica per la quale il propagatore sia prolungabile all'euclideo. Nell'euclideo, se indichiamo con $\langle O(x_1) \dots O(x_n) \rangle$ il prolungamento analitico dell'analogo T-prodotto nel minkowskiano, possiamo definire il funzionale generatore come:

$$Z_E(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \langle O(x_1) \dots O(x_n) \rangle J(x_1) \dots J(x_n) \quad (8.14)$$

si può dimostrare che questo può essere scritto come:

$$Z_E(J) = \int \prod_x \delta\phi(x) \exp \left\{ - \int d^4 x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{m_0}{2} \phi^2 + g_0 \phi^4 \right] - \int d^4 x J(x) \phi(x) \right\} \quad (8.15)$$

Nell'euclideo l'integrale funzionale converge essendo sparita la i all'esponente ed essendo presenti solo termini negativi. Dobbiamo stare attenti ai segni perché nel passare all'euclideo cambia un segno relativo fra il termine con le derivate e quello di massa nella lagrangiana. La cosa più importante è prestare attenzione al segno della costante di accoppiamento g_0 , che deve apparire con il più nell'hamiltoniana e dunque con il meno nella lagrangiana.

8.2 Discretizzazione, cut-off e limite del continuo

Rimane ancora da aggirare la difficoltà maggiore, ovvero il fatto che la misura di integrazione dell'integrale funzionale è infinita. La soluzione consiste nel considerare l'integrale infinito-dimensionale come il limite di uno finito-dimensionale. Rispetto al continuum dello spazio-tempo, prendiamo un'insieme discreto di punti x , ad esempio un reticolo iper-cubico di passo a . In questo modo invece di avere un'infinità continua ne abbiamo una discreta. Inoltre consideriamo questo reticolo solamente all'interno di un volume V dell'universo. Così l'integrale ha una misura finita e:

$$Z_E(J) = \lim_{a \rightarrow 0, V \rightarrow \infty} Z_E^{(a,V)}(J) \quad (8.16)$$

con:

$$Z_E(J) = \int \prod_{n \in V_4} \delta\phi(x_n) \exp \left\{ -a^4 \sum_{n \in V_4} \frac{1}{2} \left[\frac{\phi(x_n + a) - \phi(x_n - a)}{2a} \right]^2 + \right. \\ \left. -a^4 \sum_{n \in V_4} \frac{m_0^2}{2} \phi^2(x_n) + g_0 \phi^4(x_n) + J(x_n) \phi(x_n) \right\} \quad (8.17)$$

La presenza di a può essere vista come un cut-off ultravioletto; se infatti la variabile spaziale x è discretizzata di passo a , la sua coniugata di Fourier p sarà definita in un compatto $-\pi/a \leq p \leq \pi/a$ ⁷. Il problema di questo ragionamento è dimostrare l'esistenza del limite 8.16. Questo non esiste se eseguito ad m_0, g_0 fissati: sappiamo già che in teoria delle perturbazioni la rimozione del cut-off si può fare in contemporanea alla rinormalizzazione.

⁷è vero anche il viceversa, vedi ad esempio una particella in una buca di potenziale in meccanica quantistica non relativistica.

Dobbiamo eseguire il limite di una successione di integrali, però modificando anche l'integrando! Per capire cosa avviene quando facciamo il limite del continuo, supponiamo per un attimo che la teoria limite esista. Se in laboratorio misuriamo solo lunghezze molto maggior di a o energie molto minori di a^{-1} , non è necessario eseguire il limite $a \rightarrow 0$, possiamo anche tenerci il reticolo discreto. Supponiamo di eseguire due misure sperimentali di osservabili qualsiasi: queste saranno funzioni dei parametri liberi della lagrangiana e del passo a :

$$\begin{cases} \phi_1^{exp} = \phi_1(m_0, g_0, a) \\ \phi_2^{exp} = \phi_2(m_0, g_0, a) \end{cases} \quad (8.18)$$

Queste relazioni possono essere invertite:

$$\begin{cases} m_0 = m_0(\phi_1^{exp}, \phi_2^{exp}, a) \\ g_0 = g_0(\phi_1^{exp}, \phi_2^{exp}, a) \end{cases} \quad (8.19)$$

Appurato di aver già eseguito un numero di misure pari al numero di parametri liberi della lagrangiana, tutte le misure successive dipenderanno in realtà non dai parametri liberi, ma dalle misure precedenti! Ad esempio

$$\phi_3^{exp} = \phi_3(\phi_1^{exp}, \phi_2^{exp}, a) \quad (8.20)$$

Ora devo eseguire il limite $a \rightarrow 0$ non tenendo fissati m_0, g_0 , ma $\phi_1^{exp}, \phi_2^{exp}$. Questa è l'essenza del processo di rinormalizzazione. Se il limite $a \rightarrow 0$ così impostato non esiste, vuol dire che la teoria è valida solo entro un certo range di energie o risoluzioni spaziali. Questo è il caso della QED, che va bene solo fino ad una certa scala di energie, per noi incredibilmente alta.

Cosa possiamo dire dell'esistenza delle funzioni di Green nel limite $a \rightarrow 0$? La risposta, come vedremo meglio nel prossimo capitolo, è che in generale questo limite non esiste, ma che è sempre possibile riscaldare i campi per una costante $c(\phi_1^{exp}, \phi_2^{exp}, a)$ per ottenere l'esistenza. Questo è un punto importante perché dalle funzioni di Green si calcolano tutte le ampiezze di scattering.

9 Rinormalizzazione

9.1 Criterio di rinormalizzabilità

La rinormalizzabilità di una teoria non è mai stata dimostrata in senso non perturbativo in quattro dimensioni (in 2 o 3 dimensioni solo in alcuni casi). In teoria delle perturbazioni si ha un teorema che fornisce un criterio per l'esistenza del limite $a \rightarrow 0$ del reticolo di discretizzazione. Questo criterio riguarda le dimensioni dei parametri fisici della lagrangiana. In unità naturali ($\hbar = 1, c = 1$, ricordiamo, abbiamo una sola grandezza fondamentale: l'unità di lunghezza o, equivalentemente, il suo inverso, l'unità di energia. L'azione è adimensionale, ed il numero di dimensioni delle altre grandezze fisiche dipende dalle dimensioni dello spazio-tempo. Ad esempio, facendo riferimento alla lagrangiana seguente,

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{m_0^2}{2}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 \quad (9.1)$$

in quattro dimensioni, ϕ ha le dimensioni di un'energia, così come m_0 , mentre g_0 è adimensionale. Il criterio di rinormalizzabilità è il seguente:

Una teoria

- i cui parametri liberi sono o adimensionali o con esponenti positivi in unità di energia;
- la cui lagrangiana contiene tutti i termini compatibili con una certa simmetria;

è rinormalizzabile in teoria delle perturbazioni e tutte le funzioni di Green riguardanti i campi fondamentali possono essere rese finite purché ogni campo sia moltiplicato per un'opportuna costante.

Chiaramente la scelta della simmetria alla quale applicare il criterio è una scelta nostra che va ponderata a seconda delle caratteristiche che noi desideriamo per la teoria. Ad esempio in 9.1 non ci sono termini lineari o cubici in ϕ per preservare la simmetria $\phi \rightarrow -\phi$; se non volessimo mantenere questa simmetria, il criterio ci obbligherebbe a includere entrambi i termini in ϕ e ϕ^3 .

9.2 Richiami di teoria delle perturbazioni con l'integrale funzionale

La teoria delle perturbazioni sviluppata a partire dall'integrale funzionale è semplice. Prendiamo il funzionale generatore

$$Z(J) = \int \delta\phi e^{-S_0(\phi) - \frac{g_0}{4!} \int \phi^4 + \int J\phi} \quad (9.2)$$

dove S_0 è l'azione della teoria libera e gli integrali la cui misura non è specificata si intendono essere integrali sulle coordinate estesi a tutto lo spazio-tempo. La teoria delle perturbazioni consiste nello sviluppare questo funzionale in serie di potenze di g_0 :

$$f(g_0) = \sum_n c_n g_0^n \quad (9.3)$$

La cosa interessante è che, fintanto che siamo interessati a risultati di precisione finita, non dobbiamo preoccuparci della sua convergenza ma solo della sua asintoticità. Basta assicurarsi che la serie sia tale che:

$$\frac{\left| f(g_0) - \sum_{n=0}^N c_n g_0^n \right|}{g_0^N} \xrightarrow{g_0 \rightarrow 0} 0 \quad (9.4)$$

L'efficacia della teoria delle perturbazioni, e la sua applicabilità, dipendono dalla costante di accoppiamento. Determiniamo ora la serie perturbativa per il funzionale generatore; nei seguenti passaggi, e molte altre volte nel seguito, ometteremo di scrivere il termine di normalizzazione di $Z(J)$, ovvero:

$$Z(0) = \int \delta\phi e^{-S_0(\phi) - \frac{g_0}{4!} \int \phi^4} \quad (9.5)$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned}
Z(J) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g_0}{4!}\right)^n \int \delta\phi e^{-S_0(\phi) + \int J\phi} \left(\int \phi^4\right)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g_0}{4!}\right)^n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \int \delta\phi e^{-S_0(\phi) + \int J\phi} \phi^4(x_1) \dots \phi^4(x_n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g_0}{4!}\right)^n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \frac{\delta^4}{\delta J^4(x_1)} \dots \frac{\delta^4}{\delta J^4(x_n)} \int \delta\phi e^{-S_0(\phi) + \int J\phi} = \dots
\end{aligned} \tag{9.6}$$

...come sappiamo l'integrale funzionale residuo è gaussiano e dunque risolvibile ...

$$\dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g_0}{4!}\right)^n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \frac{\delta^4}{\delta J^4(x_1)} \dots \frac{\delta^4}{\delta J^4(x_n)} e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)\Delta(x-y)J(y)} \tag{9.7}$$

con:

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2 + m_0^2} \tag{9.8}$$

A questo punto ci troviamo davanti ad un problema tecnico di derivate successive facile nell'essenza ma difficile nella pratica: fortunatamente Feynman ha inventato il metodo dei digrammi. Prima però dobbiamo regolarizzare l'integrale funzionale. Per fare calcoli perturbativi non conviene farlo utilizzando il metodo del reticolo ma modificando il propagatore :

$$\frac{1}{q^2 + m_0^2} \rightarrow \frac{1}{q^2 + m_0^2 + \frac{1}{\Lambda^2} p^4 + \dots} \tag{9.9}$$

con Λ a rappresentare il cut-off e dunque grande. In questo modo gli integrali vengono resi automaticamente più convergenti. Indichiamo con $\Delta_\Lambda(x-y)$ il propagatore così regolarizzato.

9.3 Rinormalizzazione al prim'ordine per la teoria $\lambda\phi^4$

Mettiamo dunque in pratica il metodo dei diagrammi di Feynman, Supponiamo di voler calcolare il valore di aspettazione euclideo $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$. All'ordine zero incontriamo un solo diagramma, il propagatore stesso. All'ordine uno abbiamo due diagrammi: uno connesso, con molteplicità dodici, e uno sconnesso, formato dall'unione fra il propagatore ed un loop ad un vertice. Ricordiamoci che il funzionale generatore va normalizzato al denominatore, il quale dal punto di vista di Feynman contiene tutti i diagrammi vuoto-vuoto. Nel gioco fra numeratore e denominatore scompaiono dunque dal calcolo tutti i diagrammi sconnessi, perché si ottengono, ordine per ordine, delle cancellazioni. Se si esegue il calcolo, al prim'ordine si ottiene:

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle = \Delta_\Lambda(x-y) - \frac{g_0}{2} \Delta_\Lambda(0) \int d^4 x_1 \Delta_\Lambda(x-x_1)\Delta_\Lambda(y-x_1) + O(g_0^2) \quad (9.10)$$

Ora dobbiamo eseguire il limite per $\Lambda \rightarrow \infty$, chiaramente secondo le prescrizioni della rinormalizzazione. Dobbiamo far partecipare m_0 e g_0 al limite e riscalarlo i campi di una costante c . Per farlo dobbiamo, in pratica, scegliere tre condizioni di finitezza indipendenti per fissare i tre parametri liberi. Queste tre condizioni è conveniente sceglierle in base ad un criterio di semplicità. La prima la si può ricavare dalla funzione di Green a due punti. Conviene lavorare in trasformata di Fourier. Il secondo termine dell'equazione 9.10 può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} & \int d^4 x_1 \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq_1(x-x_1)}}{q_1^2 + m_0^2} \frac{e^{iq_2(x_1-y)}}{q_2^2 + m_0^2} = \\ & = \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_2}{(2\pi)^4} \delta(q_1 + q_2) \frac{e^{iq_1 x} e^{iq_2 y}}{(q_1^2 + m_0^2)(q_2^2 + m_0^2)} = \\ & = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{(q^2 + m_0^2)^2} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Dunque con l'aggiunta della costante c a moltiplicare i campi e mettendoci nello spazio di Fourier l'equazione 9.10 è pronta a diventare una prima condizione di finitezza. Ad esempio possiamo imporre il valore di tale espressione in $q = 0$:

$$c^2 \left(\frac{1}{q^2 + m_0^2} - \frac{g_0}{2} \Delta_\Lambda(0) \frac{1}{(q^2 + m_0^2)^2} \right) \Big|_{q=0} = \frac{1}{M^2} \quad (9.12)$$

dove M è un parametro finito arbitrario con le dimensioni di una massa. Possiamo semplificare l'algebra se scegliamo di porre la condizione sul reciproco della trasformata di Fourier⁸. Facendo l'inverso (mantenendo sempre e solo i termini lineari in g_0 oltre a quelli costanti) e ponendo $q = 0$ otteniamo:

$$\frac{1}{c^2} \left(m_0^2 + \frac{g_0}{2} \Delta_\Lambda(0) \right) = M^2 \quad (9.13)$$

Come seconda condizione scegliamo la derivata prima in dq^2 del reciproco della trasformata di Fourier della funzione di Green a due punti, valutata in $q = 0$. Questa quantità è un numero puro arbitrario ed è pari a c^2 , dunque, solo a quest'ordine, possiamo porre $c = 1$:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d \Delta_\Lambda^{-1}(q^2)}{d q^2} \Big|_{q=0} = \frac{1}{c^2} = 1 \quad (9.14)$$

Per la terza condizione non posso più sfruttare la funzione a due punti. La cosa più semplice è passare a considerare la funzione di Green a quattro punti al prim'ordine. Possiamo limitarci a considerare la parte connessa della funzione a quattro punti, perché per tutti i contributi sconnessi formati da coppie di diagrammi a due punti posso pensare di aver già eliminato gli infiniti per costruzione nei passi precedenti. Dunque rimane il contributo di un solo diagramma, quello in cui i quattro punti sono collegati al vertice di interazione, che ha molteplicità 4!:

$$\Delta_4(q^2) = g_0 \frac{1}{q_1^2 + m_0^2} \frac{1}{q_2^2 + m_0^2} \frac{1}{q_3^2 + m_0^2} \frac{1}{q_4^2 + m_0^2} \quad (9.15)$$

con $q_4 = -(q_1 + q_2 + q_3)$. Come terza condizione allora possiamo richiedere la finitezza di $c^4 \Delta_{4\Lambda}$. Tuttavia, così come fatto in precedenza, mi conviene dividere per il prodotto di quattro propagatori, in maniera tale da considerare solo i diagrammi connessi irriducibili ad una sola particella. La terza condizione di finitezza è quindi;

⁸Questo corrisponde a tenere conto solo dei diagrammi di Feynman irriducibili.

$$\left. \frac{c^4 \Delta_{4\Lambda}(q_1 \dots q_4)}{c^8 \Delta_\Lambda(q_1) \dots \Delta_\Lambda(q_4)} \right|_{q=0} = \frac{1}{c^4} \Gamma_4(0) = -g \quad (9.16)$$

Riscriviamole tutte insieme:

1. $c^{-2} \Delta_\Lambda^{-1}(0) = M^2$
2. $c^{-2} (\Delta_\Lambda^{-1})'(0) = 1$
3. $c^{-4} \Gamma_4(0) = -g$

Le quantità M^2 e G non sono direttamente le quantità fisiche, ma sono finite ed in funzione di esse possiamo calcolare le quantità fisiche. Esplicitando le tre condizioni otteniamo:

1. $c^{-2} (m_0^2 + \frac{g_0}{2} \Delta_\Lambda(0)) = M^2$
2. $c^{-2} = 1$
3. $-c^{-4} g_0 = -g$

Al prim'ordine tutto è molto semplice: si ottiene $g_0 = g$, $c = 1$. In questo modo tutti i parametri liberi della teoria sono stati fissati e si può passare a rimuovere il cutoff per ricostruire le funzioni di Green rinormalizzate. Il propagatore rinormalizzato non è più divergente ed è:

$$\Delta_R(q^2) = \frac{1}{q^2 + M^2} \quad (9.17)$$

9.4 Rinormalizzazione al secondo ordine per la teoria $\lambda\phi^4$

Il calcolo al secondo ordine è assai più complicato. Dobbiamo aggiungere tutti i contributi al secondo ordine alle tre condizioni di finitezza. Cominciamo dall'esaminare la funzione a due punti. Dobbiamo aggiungere i diagrammi a due vertici. Nello sviluppo del funzionale generatore questi appaiono moltiplicati per un fattore $\frac{1}{2!} \left(\frac{-g_0}{4!} \right)^2$. Qualsiasi contrazione io faccia fra i vertici e i punti esterni dei diagrammi, è replicabile in maniera esatta sotto

lo scambio $x_1 \leftrightarrow x_2$ fra i due vertici. Questi contributi doppi eliminano il 2! a denominatore. Questa cancellazione avviene ad ogni ordine. Ci sono tre diagrammi a due vertici nella nostra teoria; poiché vogliamo prendere solo i diagrammi irriducibili ad una particella, possiamo eliminare quello con la doppia inserzione del loop sul propagatore. Dunque il contributo aggiuntivo è dato dalla somma di due diagrammi con la loro molteplicità, e lo indichiamo con $\Pi_\Lambda(q^2)$: è una funzione molto complicata di q^2 , quadraticamente divergente. Dunque:

$$\Delta_\Lambda^{-1}(q^2) = q^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} \Delta_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) \quad (9.18)$$

Per quanto riguarda la funzione a quattro punti, abbiamo 3 diagrammi connessi che danno il loro contributo. Questi sono uguali a meno di scambi fra le posizioni delle gambe esterne, e hanno lo stesso nucleo composto da due vertici uniti da due propagatori. La loro molteplicità è data da $12 \cdot 4!$ Il nucleo di questi diagrammi è una funzione dei due impulsi in entrata ed è dato dall'integrale:

$$I_\Lambda(q_1 + q_2) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 + m_0^2} \frac{1}{(q_1 + q_2 - l)^2 + m_0^2} \quad (9.19)$$

Questo integrale è logaritmicamente divergente: abbiamo divergenze ultraviolette ma non infrarosse. Quindi al secondo ordine per Γ_4 abbiamo:

$$\Gamma_4 = -g_0 + \frac{g_0^2}{2} [I_\Lambda(q_1 + q_2) + I_\Lambda(q_1 + q_3) + I_\Lambda(q_1 + q_4)] \quad (9.20)$$

Si evince già che la rinormalizzazione non sarà banale come prima. Le tre condizioni di finitezza diventano:

1. $\frac{1}{c^2} \left(m_0^2 + \frac{g_0}{2} \Delta_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(0) \right) = M^2$
2. $\frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{d \Pi_\Lambda(q^2)}{d q^2} \Big|_{q=0} \right) = 1$
3. $\frac{1}{c^4} \left(-g_0 + \frac{g_0^2}{2} I_\Lambda(0) \right) = -g$

Dobbiamo invertire il sistema. Partendo dalla seconda condizione, ricordando che tutti i conti devono essere troncati all'ordine quadratico in g_0 , ricaviamo:

$$c^2 = 1 + g_0^2 \Pi'_\Lambda(0) \quad \rightarrow \quad c^4 = 1 + 2g_0^2 \Pi'_\Lambda(0) \quad \rightarrow \quad c^{-4} = 1 - 2g_0^2 \Pi'_\Lambda(0) \quad (9.21)$$

Sostituendo nella tre si ottiene:

$$-g_0 + \frac{3g_0^2}{2} I_\Lambda(0) = -g \quad (9.22)$$

A questo punto possiamo far vedere direttamente che $\Delta_\Lambda^{-1}(q^2)$ ha un limite finito per $\Lambda \rightarrow \infty$: partendo dalla 9.18 sottraiamo e aggiungiamo la stessa quantità $g_0^2 \Pi_\Lambda(0)$:

$$\frac{1}{c^2} \Delta_\Lambda^{-1}(q^2) = \frac{1}{c^2} \left(q^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} \Delta_\Lambda(0) - g_0^2 \Pi_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) \right) = \dots \quad (9.23)$$

... possiamo sostituire la prima condizione e far apparire M^2 ; inoltre nei termini di ordine g_0^2 la moltiplicazione per c^{-2} non fa effetto perché tale fattore differisce da uno solo per ordini quadratici in g_0 ...

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{1}{c^2} q^2 + M^2 - g_0^2 \Pi_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) = \\ &= \frac{q^2}{1 + g_0^2 \Pi'_\Lambda(0)} + M^2 - g_0^2 \Pi_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) = \\ &= q^2 (1 - g_0^2 \Pi'_\Lambda(0)) + M^2 - g_0^2 \Pi_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) = \\ &= q^2 + M^2 + g_0^2 [\Pi_\Lambda(q^2) - \Pi_\Lambda(0) - q^2 \Pi'_\Lambda(0)] = \dots \end{aligned} \quad (9.24)$$

... ora possiamo sostituire g_0^2 con g^2 poiché le correzioni sarebbero di ordine superiore al secondo ...

$$\dots = q^2 + M^2 + g^2 [\Pi_\Lambda(q^2) - \Pi_\Lambda(0) - q^2 \Pi'_\Lambda(0)] \quad (9.25)$$

La quantità ottenuta è finita per ogni Λ poiché:

- M e g sono finiti per ogni Λ .

- Abbiamo sottratto a $\Pi_\Lambda(q^2)$ i primi due termini della sua serie di Taylor eliminando così le divergenze quadratiche e logaritmiche. Infatti il termine successivo $q^4\Pi''_\Lambda(0)$ non ha problemi di convergenza.

Ecco dunque completata la rinormalizzazione della teoria al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.

9.5 Problema dei grandi logaritmi

Riflettiamo un po' sulla natura della serie perturbativa. Abbiamo sistemato le cose in maniera tale che nessun termine della serie sia infinito; chiaramente g dev'essere sufficientemente piccolo da assicurare la convergenza, ma come possiamo fare per i pezzi quali I_Λ dipendenti dagli impulsi? È possibile determinare un g piccolo per tutti i valori degli impulsi e tutti i termini della serie? Ad esempio consideriamo il termine Γ_4 :

$$\Gamma_4 = -g + \frac{g^2}{2} [I_\Lambda(q_1 + q_2) - I(\Lambda)(0) + \dots] \quad (9.26)$$

Abbiamo l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{l^2 + M^2} \frac{1}{(p_1 + p_2 - l)^2 + M^2} - \frac{1}{l^2 + M^2} \right) \quad (9.27)$$

Asintoticamente abbiamo una sottrazione fra i termini $1/l^2$ che aiuta la convergenza, ma comunque l'integrale diventa grande quanto più p_1 e p_2 sono diversi da zero. Facciamo un'analogia con un integrale in una dimensione: partiamo da

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x + M} \quad (9.28)$$

Sottriamo il suo valore in un punto \bar{M} e introduciamo un cut-off Λ per poter eseguire delle manipolazioni algebriche:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x + M} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{x + \bar{M}} &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\Lambda} \frac{dx}{x + M} - \int_0^{\Lambda} \frac{dx}{x + \bar{M}} \right) = \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\log \frac{\Lambda + M}{M} - \log \frac{\Lambda + \bar{M}}{\bar{M}} \right) = \log \left(\frac{\bar{M}}{M} \right) \end{aligned} \quad (9.29)$$

Dunque sottrarre il suo valore in un punto e introdurre l'espedito del cut-off ha reso sì finito l'integrale, ma comunque tale da crescere logicamente quanto più \bar{M} è grande. Questo mi suggerisce che il termine I_Λ non va bene per qualsiasi valore degli impulsi di input, ma solo fino a impulsi tali da permettere alla piccolezza della costante di accoppiamento g di contenere la crescita logaritmica degli integrali. Questo è il cosiddetto problema dei grandi logaritmi. Come vediamo l'integrale non presenta problema per $q_1 + q_2$ di ordine zero, ovvero per impulsi vicini al punto in cui ho deciso di rinormalizzare la teoria! Infatti se guardiamo al processo di rinormalizzazione ci accorgiamo che la scelta di valutare tutte le funzioni in $q = 0$ nelle condizioni di finitezza è del tutto arbitraria. Questo ci fa scoprire che dobbiamo adattare la scelta del punto di rinormalizzazione al nostro problema specifico: non esiste una scelta univoca che porta a buoni risultati per tutti gli impulsi. Ma dobbiamo stare attenti perché cambiare il punto di sottrazione lasciando inalterati i parametri M e $-g$ significa di fatto cambiare universi: diversi parametri fisici, diverse masse, diverse sezioni d'urto . . . Inoltre, neanche con questa accortezza potremo risolvere i nostri problemi in generale, perché si danno anche situazioni in cui $p_1 + p_2$ è grande mentre magari $p_2 + p_3$ è piccolo; allora cambiare il punto di sottrazione non servirà a risolvere il problema, perché in qualsiasi direzione ci si sposti rimarranno dei grandi logaritmi.

9.6 Divergenze infrarosse

Lo stesso tipo di problema sorge anche intorno ad un'altra questione, la seguente: supponiamo di avere particelle di massa nulla nella teoria. Questo implica la scelta $M^2 = 0$; benché infatti M^2 non rappresenti la massa fisica rinormalizzata della particella, questo è l'unico modo per essere sicuri che il propagatore abbia un polo in zero. Viceversa, scegliere $m_0 = 0$ non assicura a priori che la massa fisica non sia nulla, a meno che non ci siano delle simmetrie a protezione di questa massa, come succede per l'elettrone in QED (ma non nella nostra teoria di prova $\lambda\phi^4$). Dunque m_0 dev'essere scelta nella forma $m_0 = f(g_0)\Lambda$. Mi rimane quindi una teoria ad un solo parametro libero, sia esso g_0 o g . Ma proviamo a mettere $M^2 = 0$ nell'integrale di prima:

$$\int_0^\Lambda \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{l^2} \frac{1}{(p_1 + p_1 - l)^2} - \frac{1}{l^2} \right) \quad (9.30)$$

A questo punto sorge anche una divergenza infrarossa, che è un divergenza fisica, che si incontra in laboratorio. Questo ci fa capire che non possiamo

rinormalizzare in 0, ma in un punto arbitrario μ^2 . Le condizioni di finitezza diventano:

1. $\Delta_{\Lambda}^{-1}(\mu^2) = 0$
2. $(\Delta_{\Lambda}^{-1})'(\mu^2) = 1$
3. $\Gamma_4(\mu^2) = -g$

Per motivi pratici ed estetici nel dire che si sceglie come punto di sottrazione μ^2 si sottintende, a proposito della funzione a quattro punti, la scelta del cosiddetto punto simmetrico: ovvero le condizioni di finitezza sono valutate per $q_1^2 0 q_2^2 = q_3^2 = (q_1 + q_2 + q_3)^2 = \mu^2$, che implica $p_1 p_2 = p_1 p_3 = p_2 p_3 = -\frac{\mu^2}{3}$. Come già accennato nella sezione precedente, dovremo però stabilire come devono dipendere i parametri liberi dal punto di sottrazione μ^2 in maniera da non far cambiare la fenomenologia.

9.7 Equazioni di Callan-Symanzik

Un piccolo teorema. Prima di discutere le equazioni che ci permettono di determinare l'andamento dei parametri della teoria in funzione della scala di energia alla quale vogliamo studiarla, vogliamo dimostrare un semplice enunciato: moltiplicare tutti i campi per una costante Z non modifica la fenomenologia del nostro universo. Difatti questa operazione lascia chiaramente invariati i poli della funzione a due punti: data la trasformazione $\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle \rightarrow Z^n \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle$, nello spazio di Fourier otteniamo la trasformazione $\Delta(q^2) \rightarrow Z^2 \Delta(q^2)$: chiaramente modifichiamo il residuo al polo ma non la posizione del polo. Se consideriamo poi le formule di riduzione, possiamo sempre reintegrare Z nella costante Z_O grazie all'arbitrarietà della scelta dell'operatore O . Riportiamo questo semplice risultato perché ci servirà a breve.

Consideriamo una teoria $\lambda\phi^4$ con un cut-off ragionevole: ad esempio la lunghezza di Planck come passo del reticolo spazio-temporale. Prendiamo poi m_0 tale che la teoria sia di massa nulla: $m_0 = f(g_0) \Lambda$: abbiamo una teoria ad un solo parametro, g_0 . Pur di stare ad energie molto inferiori del cut-off, non abbiamo bisogno di rinormalizzare. Fissata una condizione di finitezza del tipo

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = F(x_1, \dots, x_n, \Lambda, g_0) \quad (9.31)$$

abbiamo fissato tutto l'universo. La seconda condizione di finitezza si usa per fissare la costante con cui riscaldare i campi:

$$c^n \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle \Big|_{F, q^2 = \mu^2} = 1 \quad (9.32)$$

La terza condizione mi restituirà una costante g anch'essa fissata! Ora pensiamo alla rinormalizzazione. Questa si imposta riscaldando le funzioni di Green, ad esempio secondo il fattore convenzionale $1/\sqrt{Z^n}$; se ci mettiamo nello spazio di Fourier il processo può essere rappresentato dal seguente passaggio:

$$G_n(\Lambda, g_0; p) \xrightarrow{\text{Rinormalizzazione}} G_n^R(g, \mu; p) = \frac{1}{\sqrt{Z^n}} G_n(\Lambda, g_0; p) \quad (9.33)$$

A questo punto la rinormalizzazione consiste in un limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ a g, μ fissati. Se il cut-off è molto lontano dalla scala di energia alla quale la teoria è testata, ovvero alla quale le misure vengono eseguite, ci sarà una piccola differenza fra le funzioni di Green originarie e quelle rinormalizzate, ad esempio di ordine $1/\Lambda$. D'altronde la dipendenza da μ viene introdotta solo attraverso Z , e per motivi dimensionali dev'essere $Z(g, \mu, \Lambda) = Z(g, \frac{\mu}{\Lambda})$. Dunque per grandi Λ si ha:

$$G_n(\Lambda, g_0; p) \simeq \sqrt{Z^n(g, \frac{\mu}{\Lambda})} G_n^R(g, \mu; p) \quad (9.34)$$

La dipendenza da μ si deve compensare nei due fattori a destra. Matematicamente esprimiamo questo fatto così:

$$\mu \frac{d}{d\mu} G_n(\Lambda, g_0; p) \Big|_{g_0, \Lambda} = 0 \quad (9.35)$$

Il μ a moltiplicare è stato inserito per motivi dimensionali (non vogliamo introdurre scale di energie). Le condizioni di rinormalizzazione, che abbiamo applicato esplicitamente nelle sezioni precedenti, fissano la relazione $g = g(g_0, \frac{\mu}{\Lambda})$ ed equivalentemente la relazione fra Z e g o Z e g_0 . Questo ci dice che a Λ e g_0 fissati, g diventa una funzione di μ . La nostra equazione differenziale non è banale se riferita alle funzioni G_n^R . Da questa equazione

differenziale possiamo ricavare proprio la relazione fra μ e g che ci dice come cambiando μ si possa modificare g lasciando invariato l'universo. Non ci rimane che fare le derivate:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} \sqrt{Z^n(g, \frac{\mu}{\Lambda})} G_n^R(g, \mu; p) &= \frac{n}{2} Z^{\frac{n}{2}-1} \mu \frac{dZ}{d\mu} \Big|_{g_0, \Lambda} G_n^R(g, \mu; p) + \\ &+ Z^{\frac{n}{2}} \mu \frac{\partial G_n^R}{\partial \mu} + Z^{\frac{n}{2}} \mu \frac{\partial G_n^R}{\partial g} \frac{dg}{d\mu} \Big|_{\Lambda, g_0} = 0 \end{aligned} \quad (9.36)$$

Dividiamo per $Z^{\frac{n}{2}}$. Al primo termine possiamo sfruttare il fatto che:

$$\frac{1}{Z} \mu \frac{dZ}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} \log Z \quad (9.37)$$

Quindi:

$$\frac{n}{2} \mu \frac{d}{d\mu} \log Z \Big|_{\Lambda, g_0} G_n^R(g, \mu; p) + \mu \frac{\partial G_n^R}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, g_0} + \mu \frac{\partial G_n^R}{\partial g} \frac{dg}{d\mu} \Big|_{\Lambda, g_0} = 0 \quad (9.38)$$

Introduciamo le due funzioni convenzionalmente chiamate β e γ :

- $\mu \frac{d}{d\mu} \log \sqrt{Z} \Big|_{\Lambda, g_0} = \gamma(g, \frac{\Lambda}{\mu})$
- $\mu \frac{dg}{d\mu} \Big|_{\Lambda, g_0} = \beta(g, \frac{\Lambda}{\mu})$

Si ottengono così le equazioni di Callan-Symanzik:

$$\mu \frac{\partial G_n^R}{\partial \mu} + \beta(g, \Lambda/\mu) \frac{\partial G_n^R}{\partial g} + n\gamma(g, \Lambda/\mu) G_n^R \simeq 0 \quad (9.39)$$

Abbiamo scritto $\simeq 0$ perché il limite $\Lambda \rightarrow \infty$ ancora non è stato fatto. Questo esiste se le funzioni β , γ hanno un limite a g fissato. In effetti è così. Le equazioni di Callan-Symanzik costituiscono un sistema infinito di equazioni differenziali (una per ogni valore di n). Se consideriamo le prime due ($n = 2$ ed $n = 4$) otteniamo un sistema di due equazioni in due incognite, β e γ . Risolvendo il sistema esprimiamo β e γ in funzione di quantità che

hanno tutte un limite finito per $\Lambda \rightarrow \infty$. In definitiva possiamo togliere il cut-off dalle equazioni:

$$\mu \frac{\partial G_n^R}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial G_n^R}{\partial g} + n\gamma(g) G_n^R = 0 \quad (9.40)$$

Queste equazioni possono essere risolte esattamente; vediamo come. Per prima cosa conviene eliminare il termine $n\gamma(g)$: questo è facile, basta effettuare una sostituzione. Introducendo $\bar{\mu}$ e \bar{g} , che sono i valori corrispondenti ad un certo punto di sottrazione, poniamo:

$$G_n(g, \mu; p) = \exp \left\{ -n \int_{\bar{g}}^g \frac{\gamma(g') dg'}{\beta(g')} \right\} \Phi_n(g, \mu; p) \quad (9.41)$$

Riscrivendo le equazioni di Callan-Symanzik in funzione delle Φ_n due termini vengono accorpati in uno:

$$\mu \frac{\partial \Phi_n}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial \Phi_n}{\partial g} = 0 \quad (9.42)$$

Abbiamo un'equazione alle derivate parziali risolvibile col metodo della caratteristiche. Ovvero l'integrale della nostra equazione differenziale è una funzione degli integrali primi dell'equazione del prim'ordine:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{dg}{\beta(g)} \quad (9.43)$$

Integrando quest'ultima si ottiene:

$$\log \frac{\mu}{\bar{\mu}} - c = \int_{\bar{g}}^g \frac{dg}{\beta(g)} \quad \rightarrow \quad c = \log \frac{\mu}{\bar{\mu}} - \int_{\bar{g}}^g \frac{dg}{\beta(g)} \quad (9.44)$$

con c costante se μ e g sono soluzioni. Il teorema di integrazione al quale facciamo riferimento ci dice che:

$$\Phi_n(x_1, \dots, x_n, g, \mu) = F_n(x_1, \dots, x_n, c) \quad (9.45)$$

Non otteniamo chiaramente una soluzione completa, ma è un bel passo avanti. Per abbiamo stabilito che:

$$G_n(x_1, \dots, x_n, g, \mu) = \exp \left\{ -n \int_{\bar{g}}^g \frac{\gamma(g') dg'}{\beta(g')} \right\} F_n \left(x_1, \dots, x_n, \log \frac{\mu}{\bar{\mu}} - \int_{\bar{g}}^g \frac{dg}{\beta(g)} \right) \quad (9.46)$$

La funzione F_n è collegata alle funzioni di Green calcolate nel punto di rinormalizzazione $\bar{\mu}, \bar{g}$:

$$G_n(x_1, \dots, x_n, \bar{g}, \bar{\mu}) = F_n(x_1, \dots, x_n, 0) \quad (9.47)$$

Cosa ci dice questa relazione? Supponiamo di aver rinormalizzato in $\bar{\mu}, \bar{g}$. Questo corrisponde alla scelta di un universo con una certa fenomenologia, certe costanti fissate e certi valori per le funzioni di Green. Tutte queste quantità sono destinate a cambiare se si cambiano μ e g , a meno che non lo si faccia in maniera tale da lasciare invariata la relazione 9.47: questo può avvenire se $c = 0$ anche nel nuovo punto di rinormalizzazione, ovvero se:

$$\log \frac{\mu}{\bar{\mu}} = \int_{\bar{g}}^g \frac{dg'}{\beta(g')} \quad (9.48)$$

Abbiamo sostanzialmente una relazione implicita $g(\mu)$ che risponde alla nostra necessità iniziale di sapere come la costante di accoppiamento vari con la scelta della scala di energia alla quale eseguire la rinormalizzazione in maniera tale da lasciare invariate le costanti e le osservabili dell'universo scelto. Muovendosi lungo questa traiettoria di rinormalizzazione le funzioni di Green cambiano solo per un fattore esponenziale:

$$G_n(x_1, \dots, x_n, g(\mu), \mu) = \exp \left\{ -n \int_{\bar{g}}^g \frac{\gamma(g') dg'}{\beta(g')} \right\} G_n(x_1, \dots, x_n, \bar{g}, \bar{\mu}) \quad (9.49)$$

Grazie al piccolo teorema enunciato all'inizio di questa sezione, sappiamo che tale fattore moltiplicativo è ininfluenza. La funzione $g(\mu)$ è detta traiettoria del gruppo di rinormalizzazione e ci dà una traccia dei diversi punti di sottrazione equivalenti nella rinormalizzazione di una teoria.

10 Libertà asintotica

Applichiamo tutto questo marchingegno. Dopo aver normalizzato la teoria in $\bar{\mu}, \bar{g}$, facciamo la teoria delle perturbazioni, che ci conduce alla serie:

$$G_n(p_1, \dots, p_n; \bar{g}, \bar{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p_1, \dots, p_n; \bar{\mu}) \bar{g}^n \quad (10.1)$$

A questo punto si incontra il problema dei grandi logaritmi così come quello delle divergenze infrarosse. Sappiamo di non avere problemi per impulsi $\bar{p} \sim \bar{\mu}$. Le difficoltà si presentano per grandi impulsi o piccoli impulsi. Vediamo quali sono le tecniche per migliorare il punto di sottrazione della teoria. Invertendo la relazione 9.49 si ottiene:

$$G_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{g}, \bar{\mu}) = \exp \left\{ n \int_{\bar{g}}^g \frac{\gamma(g') dg'}{\beta g'} \right\} G_n(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n, g(\mu), \mu) \quad (10.2)$$

Ora riscaldiamo gli impulsi: $\bar{p} \rightarrow p = \lambda \bar{p}$. La relazione diventa:

$$G_n(\lambda \bar{p}_1, \dots, \lambda \bar{p}_n; \bar{g}, \bar{\mu}) = \exp \left\{ n \int_{\bar{g}}^g \frac{\gamma(g') dg'}{\beta g'} \right\} G_n(\lambda \bar{p}_1, \dots, \lambda \bar{p}_n, g(\mu), \mu) \quad (10.3)$$

Vogliamo studiare il limite di questa equazione per $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$ per vedere come la strategia della rinormalizzazione risponde al problema delle divergenze infrarosse o ultraviolette nella serie perturbativa. La funzione G_n ha dimensione, nello spazio degli impulsi in quattro dimensioni, pari a E^{D_n} con $D_n = -3n + 4$; poiché è una funzione omogenea di grado D_n in energia la possiamo scrivere nella forma

$$G_n = \mu^{D_n} f_n \left(\frac{p}{\mu}, g \right) \quad (10.4)$$

con f_n adimensionale. Di conseguenza, ponendo $\mu = \lambda \bar{\mu}$ (è arbitrario) e $g_\lambda = g(\lambda \bar{\mu})$:

$$\begin{aligned} G_n(\lambda \bar{p}_1, \dots, \lambda \bar{p}_n, g(\mu), \mu) &= (\lambda \bar{\mu})^{D_n} f_n \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\mu}}, g_\lambda \right) = \\ &= \lambda^{D_n} \bar{\mu}^{D_n} f_n \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\mu}}, g_\lambda \right) = \lambda^{D_n} G_n(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n, g_\lambda, \bar{\mu}) \end{aligned} \quad (10.5)$$

E:

$$G_n(\lambda \bar{p}_1, \dots, \lambda \bar{p}_n, g(\mu), \mu) = \lambda^{D_n} \exp \left\{ n \int_{\bar{g}}^g \frac{\gamma(g') dg'}{\beta g'} \right\} G_n(\lambda \bar{p}_1, \dots, \lambda \bar{p}_n, g_\lambda, \bar{\mu}) \quad (10.6)$$

Ho riespresso le funzioni di Green che si ottengono dopo il riscaldamento degli impulsi in funzione di quelle vecchie, fatta salva la presenza di g_λ al posto di g . Questo risolve i nostri problemi a patto che g_λ sia di una grandezza tollerabile. Ci siamo quindi ricondotti al problema di considerare come varia $g(\lambda)$, e questo lo possiamo vedere dall'equazione 9.48. Applicando l'operatore $\mu \frac{d}{d\mu}$ si ottiene:

$$1 = \frac{1}{\beta(g)} \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} \quad \rightarrow \quad \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} = \beta(g) \quad (10.7)$$

Allora si distinguono due casi a seconda del segno della funzione $\beta(g)$:

- $\beta(g) > 0$. Chiaramente g cresce per $\lambda \rightarrow \infty$ e decresce per $\lambda \rightarrow 0$. Parliamo di teorie asintoticamente libere nell'infrarosso.
- $\beta(g) < 0$. Al contrario, g cresce per $\lambda \rightarrow 0$ e decresce per $\lambda \rightarrow \infty$. Parliamo allora di teorie asintoticamente libere nell'ultravioletto.

10.1 Calcolo di $\beta(g)$ per la teoria $\lambda\phi^4$

Partiamo dalla relazione:

$$g = g_0 - \frac{3g_0^2}{2} I_\Lambda(\mu) \quad \text{con} \quad I_\Lambda(\mu) = \int_\mu^\Lambda \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4} \quad (10.8)$$

Abbiamo supposto che la massa sia nulla e inserito l'estremo di integrazione μ per evitare le divergenze infrarosse. Dall'integrale $I(\Lambda)$ possiamo scartare la parte finita, ininfluente ai fini del calcolo di β (ma non per i calcoli perturbativi...), passare in coordinate polari e scrivere:

$$g = g_0 - \frac{3g_0^2}{2} \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \log \frac{\Lambda}{\mu} \quad (10.9)$$

Rimane da calcolare l'angolo solido in quattro dimensioni, lo si fa facilmente con i soliti integrali gaussiani e risulta $2\pi^2$. Dunque:

$$\beta(g) = \mu \frac{d}{d\mu} \left(g_0 - \frac{3g_0^2}{16\pi^2} \log \frac{\Lambda}{\mu} \right) = \frac{3g_0^2}{16\pi^2} > 0 \quad (10.10)$$

Otteniamo una teoria asintoticamente libera nell'infrarosso, che avrà un limite per grandi energie. La stessa cosa avviene per la QED ma non per le teorie di gauge non abeliane.

10.2 Argomento di Landau

Discutiamo più da vicino la questione della libertà asintotica di una teoria. Il segno della funzione $\beta(g)$ dipende dal segno del primo termine dello sviluppo $\beta(g) = \beta_0 g^2 + \dots$, poiché i termini successivi saranno ben più piccoli in modulo. Inserendo solo il termine con β_0 nella relazione 9.48 si ottiene:

$$\log \frac{\mu}{\bar{\mu}} = \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{1}{\bar{g}} - \frac{1}{g} \right) \quad (10.11)$$

Si ricava:

$$g(\mu) = \frac{\bar{g}}{1 - \beta_0 \bar{g} \log \frac{\mu}{\bar{\mu}}} \quad (10.12)$$

Ovviamente per $\mu = \bar{\mu}$ si ritrova $g(\mu) = \bar{g}$. Da questa funzione possiamo poi ricostruire quanto già detto: se $\beta_0 > 0$, facendo crescere μ anche la costante di accoppiamento cresce. Per $\mu \rightarrow 0$ invece diventa sempre più piccola, e abbiamo una teoria libera nell'infrarosso. Per $\beta_0 < 0$ avviene esattamente l'opposto. Lo zero del denominatore è detto polo di Landau. Lo stesso Landau mostrò che considerando solo i termini leading-log della serie perturbativa si può ottenere una serie geometrica che ha come risultato la relazione:

$$g = \frac{g_0}{1 - \beta_0 g_0 \log \frac{\Lambda}{\mu}} \quad (10.13)$$

Cosa possiamo dedurne? Abbiamo una curva sul piano g, g_0 che dipende anche da Λ . Cosa succede se cambio Λ a g fissato? La curva cambierà e di conseguenza risaliremo ad un diverso valore di g_0 . Con una successione di queste curve possiamo ottenere il limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ a g fissato. Ora, nel nostro caso, se $\beta_0 > 0$, g ha un asintoto orizzontale; nel modello di Landau se prendiamo la successione delle curve l'asintoto decresce e tende a zero per $\Lambda \rightarrow \infty$, e riotterremo una teoria libera, senza il termine di interazione che scompare. Chiaramente questo è un segnale che la validità della teoria è limitata ad un certo range di energie. D'altronde il limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ è accademico, perché sappiamo già che le attuali teorie di fisica delle particelle sono incomplete e dovranno essere unite alla gravitazione oltre la scala di Planck, che costituisce il limite di validità ed è un cut-off al momento irraggiungibile. Non sarebbe sensato avere un limite matematicamente corretto vista la situazione.

Una curiosità è che l'argomento di Landau viene ribaltato nel caso $\beta_0 < 0$. In questo caso l'asintoto è verticale e un limite sensato per $\Lambda \rightarrow \infty$ esiste. Dunque le teorie asintoticamente libere nell'ultravioletto potrebbero mantenere una loro validità. Ricordiamo però che l'argomento di Landau si basa solo su un modello, anche se abbastanza accurato, perché la relazione fra g e g_0 sarebbe ben più complicata se si considerasse tutta la serie perturbativa.

10.3 Variazioni dello spettro di massa

Per una teoria asintoticamente libera nell'infrarosso ci aspettiamo che lo spettro di massa sia una piccola variazione di quello libero, mentre questo non accade per le teorie libere nell'ultravioletto. Perché?...

11 Fermioni

11.1 Variabili grassmanniane

Se vogliamo studiare una teoria con la presenza dei fermioni, dobbiamo inserire l'anticommutazione laddove prima c'era la commutazione. Questo fa nascere un problema tecnico non da poco. Infatti l'anticommutatore rende il prodotto fermionico una funzione anti-simmetrica, mentre la derivata funzionale che si applica nel metodo del funzionale generatore è simmetrica. Questo problema si risolve introducendo le variabili di Grassmann per trattare i campi fermionici.

L'algebra grassmanniana si realizza introducendo nei numeri reali o complessi una quantità c anti-commutante, ovvero tale che $c^2 = 0$. I numeri grassmanniani sono tutti quelli della forma $\alpha + \beta c$ con α, β reali o complessi a piacere. Oltre a definire le proprietà algebriche di queste variabili, che possono tutte essere dedotte dalla proprietà $c^2 = 0$, dobbiamo anche imparare a fare l'analisi con questo nuovo tipo di numeri, ovvero le derivate e gli integrali. Non essendo possibile avere termini quadratici o di ordini successivi in c , tutte le funzioni possibili sono della forma $f(c) = \alpha + \beta c$. Definiamo allora:

$$\frac{d}{dc} f(c) = \beta \tag{11.1}$$

L'integrale va pensato come un funzionale lineare sulle funzioni $f(c)$. Dobbiamo fornire euristicamente una regola che faccia corrispondere ad ognuna di queste funzioni un numero. Abbiamo:

$$\int d c f(c) = \int d c (\alpha + \beta c) = \alpha \int d c + \beta \int d c c \quad (11.2)$$

Dobbiamo stabilire qual è il risultato da associare alle due quantità $\int d c$ e $\int d c c$. Vorremmo mantenere alcune importanti proprietà dell'integrale ordinario:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) d x = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+a) d x \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} F'(x) d x = 0 \quad (11.3)$$

Queste proprietà sono molto importanti per l'utilizzo degli integrali funzionali, infatti grazie ad esse si può ricavare il fatto che dall'integrale funzionale discendono delle corrette equazioni del moto. Poiché è nostra intenzione trattare i fermioni con il metodo funzionale vogliamo garantire queste caratteristiche anche nel calcolo con le variabili grassmanniane. Poniamo quindi:

$$\beta \int d c = 0 \quad , \quad \int d c c = 1 \quad (11.4)$$

dove chiaramente la scelta della costante 1 nel secondo integrale è una convenzione. Queste regole esauriscono la discussione delle variabili grassmanniane in una dimensione. In due dimensioni abbiamo due variabili anticommutanti c_1, c_2 tali che $c_1^2 = c_2^2 = 0$ e $c_1 c_2 = -c_2 c_1$. Le funzioni sono tutte e sole quelle della forma:

$$f(c_1, c_2) = \alpha + \beta c_1 + \gamma c_2 + \delta c_1 c_2 \quad (11.5)$$

Possiamo definire le derivate parziali: poiché l'ultimo termine di $f(c_1, c_2)$ avrebbe potuto essere scritto anche come $-\delta c_2 c_1$, per non incontrare problemi di consistenza nella definizione dobbiamo stabilire che se la derivata passa attraverso una qualsiasi variabile di Grassmann deve portare un segno meno. Dunque si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial c_1} = \beta + \delta c_2 \\ \frac{\partial f}{\partial c_2} = \gamma - \delta c_1 \end{cases} \quad (11.6)$$

Vediamo quindi che le derivate seconde anticommutano:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial c_1 \partial c_2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial c_2 \partial c_1} = \delta \quad (11.7)$$

In questo modo risolviamo il problema tecnico cui accennavamo all'inizio, della incongruenza fra le proprietà di simmetria delle derivate funzionali e quelle del T-prodotto. Per quanto riguarda l'integrale, abbiamo:

$$\int d c_1 d c_2 f(c_1, c_2) = \delta \int d c_1 d c_2 c_1 c_2 = -\delta \int d c_1 c_1 d c_2 c_2 = -\delta \quad (11.8)$$

11.2 Integrali gaussiani

Una digressione a parte la meritano gli integrali gaussiani, che hanno un ruolo centrale nel metodo del funzionale generatore. Per gli integrali ordinari, su variabili bosoniche, abbiamo delle regole consolidate:

- in una dimensione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

- in più dimensioni, data una matrice A_{ij} reale simmetrica e positiva (dunque diagonalizzabile):

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^n x e^{-x_i A_{ij} x_j} = \int_{-\infty}^{\infty} d^n y e^{-\sum_i \lambda_i y_i^2} = \prod_i \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det A}}$$

- in più dimensioni, nel caso complesso (dunque con numero doppio di variabili...):

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^n z d^n \bar{z} e^{-\bar{z}_i A_{ij} z_j} = \frac{\text{cost.}}{\det A}$$

E per i fermioni? Chiaramente essendo $c^2 = 0$ partiamo dall'analisi i due dimensioni. Una forma quadratica $c_i A_{ij} c_j = c_1 A_{12} c_2 + c_2 A_{21} c_1$ deve essere antisimmetrica per non fornire una somma nulla. Allora abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int d c_1 d c_2 e^{-c_i A_{ij} c_j} &= \int d c_1 d c_2 (1 - c_i A_{ij} c_j) = \int d c_1 d c_2 (1 - 2c_1 A_{12} c_2) = \\
&= -2A_{12} \int d c_1 d c_2 c_1 c_2 = 2A_{12} = 2\sqrt{\det A}
\end{aligned}
\tag{11.9}$$

La cosa notevole è che ci ritroviamo la radice del determinante al numeratore invece che al denominatore. Questa è la differenza fondamentale fra il caso bosonico e quello fermionico. Come per il caso bosonico, se utilizziamo variabili grassmanniane complesse abbiamo come risultato $\det A$ invece della radice.

11.3 Funzionale generatore

Vogliamo studiare una teoria con un campo bosonico ϕ , uno fermionico ψ e la loro interazione. Un prototipo di lagrangiana è il seguente:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\mu_0^2}{2} \phi^2 + \bar{\psi} (i\partial - m_0) \psi + g_0 \phi \bar{\psi} \psi \tag{11.10}$$

Cosa ci dice il criterio di rinormalizzabilità riguardo a questa lagrangiana? In quattro dimensioni, si ha, in unità di energia, $\dim \psi = 3/2$, $\dim \phi = 1$, dunque g_0 è adimensionale. Abbiamo incluso tutti i termini compatibili con le simmetrie? Rispetto alla teoria libera, abbiamo perso la simmetria $\phi \rightarrow -\phi$. Rispetto alla simmetria di parità, se consideriamo ϕ un campo scalare possiamo aggiungere tutti i termini di autointerazione di ϕ fino alla potenza quarta, incluso quello lineare e quello cubico. Per motivi dimensionali non si possono aggiungere potenze superiori del campo fermionico. Considerando tutti i termini avremmo sei parametri liberi nella teoria. Se consideriamo invece ϕ un campo pseudoscalare, che cambia segno sotto parità, i termini in ϕ e ϕ^3 vanno scartati e una buona lagrangiana è:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\mu_0^2}{2} \phi^2 + \bar{\psi} (i\partial - m_0) \psi + g_0 \phi \bar{\psi} \gamma_5 \psi + \lambda_0 \phi^4 \tag{11.11}$$

Questa teoria a quattro parametri liberi è rinormalizzabile e conserva la parità. Non vedremo la rinormalizzazione perché comporta solo maggiori questioni tecniche rispetto a quanto già fatto e nessuna novità concettuale.

La usiamo come prototipo per vedere come si descrivono i fermioni con metodi funzionali. Innanzitutto dobbiamo capire come si trasforma nell'euclideo la parte fermionica dell'integrale funzionale. Se si fa il passaggio formale $ix_M^0 \rightarrow x^0 E$ e si sviluppa il termine $\not{\partial} = \gamma_\mu \partial^\mu$ vediamo che il termine fermionico rimane invariato a patto di definire una matrice euclidea appropriata $\gamma_E^0 = i\gamma_M^0$. Sistemato questo dettaglio, possiamo partire definendo un funzionale generatore con tre sorgenti diverse: J bosonica e $\eta, \bar{\eta}$ fermioniche.

$$Z(J, \eta, \bar{\eta}) = \langle 0 | T e^{i \int J\phi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta} | 0 \rangle \quad (11.12)$$

Poiché il funzionale di J è stato già trattato, poniamo per ora a zero la sorgente bosonica e sviluppiamo la parte fermionica:

$$\begin{aligned} Z(0, \eta, \bar{\eta}) &= \langle 0 | T e^{i \int \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta} | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle 0 | T \left(\int \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right)^n | 0 \rangle = \\ &= 1 + \frac{i^2}{2} \langle 0 | T \left(\int d^4 x \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \right) \left(\int d^4 y \bar{\eta}(y)\psi(y) + \bar{\psi}(y)\eta(y) \right) | 0 \rangle + \dots = \\ &= 1 + i^2 \langle 0 | T \left(\int d^4 x d^4 y \bar{\eta}(x)\psi(x)\bar{\psi}(y)\eta(y) \right) | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (11.13)$$

Vediamo che facendo operare le derivate funzionale grassmanniane compare un fondamentale segno meno che differenzia i fermioni dai bosoni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i^2} \frac{\delta Z(0, \eta, \bar{\eta})}{\delta \eta(x_1)} &= - \int d^4 x \langle 0 | T [\bar{\eta}(x)\psi(x)\bar{\psi}(x_1)] | 0 \rangle \\ \longrightarrow \frac{i}{i^2} \frac{\delta^2 Z(0, \eta, \bar{\eta})}{\delta \bar{\eta}(x_2)\delta \eta(x_1)} &= - \langle 0 | T [\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (11.14)$$

Invertendo l'ordine delle derivate d'altronde otteniamo il segno opposto:

$$\frac{i}{i^2} \frac{\delta^2 Z(0, \eta, \bar{\eta})}{\delta \eta(x_2)\delta \bar{\eta}(x_1)} = \langle 0 | T [\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)] | 0 \rangle \quad (11.15)$$

Con questo abbiamo appurato che il funzionale generatore è stato ridefinito in maniera coerente per i fermioni. Ora dobbiamo risolverlo. Sappiamo che, nell'euclideo:

$$Z(J, \eta, \bar{\eta}) = \int \delta\phi \delta\psi \delta\bar{\psi} e^{-S_E(\phi, \psi, \bar{\psi}) + \int J\phi + \int \bar{\eta}\psi + \int \bar{\psi}\eta} \quad (11.16)$$

Se guardiamo alla forma della lagrangiana 11.11 notiamo che l'integrale funzionale è gaussiano nei campi fermionici, che compaiono solo in forma quadratica. Dovremmo poterlo risolvere esattamente. Consideriamo quindi l'integrale funzionale:

$$\int \delta\psi \delta\bar{\psi} e^{\int \bar{\psi} D(\phi) \psi + \int \bar{\psi}\eta + \int \bar{\eta}\psi} \quad (11.17)$$

dove $D(\phi)$ è un operatore differenziale dipendente dal campo ϕ :

$$D(\phi) = i\partial - m_0 + g_0 \phi \gamma_5 \quad (11.18)$$

La nostra idea è di risolvere esattamente il funzionale fermionico e fare la teoria delle perturbazioni solamente con il pezzo bosonico rimasto. . . Sappiamo ovviamente che risolvendo l'integrale fermionico rimarrà il determinante dell'operatore $D(\phi)$ da qualche parte, e dovremo capire bene cos'è. Per risolvere l'integrale usiamo sostanzialmente il solito metodo per gli integrali gaussiani con un termine lineare: cerchiamo di ricostruire un quadrato perfetto. Se poniamo:

$$\begin{cases} \psi = \tilde{\psi} + \chi \\ \bar{\psi} = \tilde{\bar{\psi}} + \bar{\chi} \end{cases} \quad (11.19)$$

con $\tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}}$ soluzioni dell'equazione:

$$\begin{cases} D(\phi) \tilde{\psi} + \eta = 0 \\ \tilde{\bar{\psi}} \overleftarrow{D}(\phi) + \bar{\eta} = 0 \end{cases} \quad (11.20)$$

abbiamo che $\chi, \bar{\chi}$ sono i nuovi campi di integrazione e l'esponente diventa:

$$\bar{\psi} D(\phi) \psi + \bar{\psi}\eta + \eta\bar{\psi} = \bar{\eta}\tilde{\psi} + \bar{\chi} D(\phi) \chi \quad (11.21)$$

Conviene scrivere:

$$\tilde{\psi} = - \int d^4 y S(x, y; \phi) \eta(y) \quad (11.22)$$

con $S(x, y; \phi)$ tale che $D_x(\phi)S(x, y; \phi) = \delta(x - y)$. Notiamo che questa funzione di Green non dipende necessariamente dalla differenza $x - y$ perché c'è anche la dipendenza da ϕ che complica le cose... In ogni caso abbiamo ridotto l'integrale fermionico al termine:

$$e^{-\int \bar{\eta}(x) S(x, y; \phi) \eta(y)} \int \delta\chi \delta\bar{\chi} e^{\int \bar{\chi} D(\phi) \chi} = \det D(\phi) e^{-\int \bar{\eta}(x) S(x, y; \phi) \eta(y)} \quad (11.23)$$

L'integrale funzionale totale della teoria sarà:

$$Z(J, \eta, \bar{\eta}) = \int \delta\phi e^{-S_0(\phi) - \int \lambda_0 \phi^4 + \int J\phi} \det D(\phi) e^{-\int \bar{\eta}(x) S(x, y; \phi) \eta(y)} \quad (11.24)$$

11.4 Propagatore fermionico

Occupiamoci innanzitutto del propagatore $S(x, y; \phi)$. Sappiamo che per $g_0 =$, scomparendo la dipendenza da ϕ , dobbiamo recuperare il propagatore fermionico $S(x - y)$. Non è detto che l'invarianza per traslazioni che si ha per $g_0 = 0$ rimanga anche in presenza di interazione. Cominciamo però dal caso libero. Nell'euclideo:

$$(i\partial_x - m_0) S(x - y) = \delta^4(x - y) \quad (11.25)$$

Cerchiamo una soluzione nella forma:

$$S(x - y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{S}(q) e^{iq(x - y)} \quad (11.26)$$

Otteniamo:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{iq(x - y)} (-\not{q} - m_0) \tilde{S}(q) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{iq(x - y)} \quad (11.27)$$

$$(\not{q} + m_0) \tilde{S}(q) = -1 \quad \longrightarrow \quad \tilde{S}(q) = -\frac{1}{\not{q} + m_0} = -\frac{\not{q} - m_0}{q^2 - m_0^2} = \frac{\not{q} - m_0}{q_E^2 + m_0^2} \quad (11.28)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo introdotto esplicitamente le matrici γ euclidee. Vediamo ora che succede se passiamo alla teoria delle perturbazioni. Ad esempio abbiamo:

$$\langle \bar{\psi}_i(x) \psi_j(y) \rangle = \int \delta\phi e^{-S_0(\phi) - \lambda_0 \int \phi^4 + \int J\phi} S_{ij}(x, y; \phi) \det D(\phi) \quad (11.29)$$

Ricordiamoci che è sempre presente la normalizzazione a denominatore. Vogliamo capire che tipo di diagrammi escono fuori da questo integrale funzionale. Indicando il funzionale libero con S^0 , possiamo procedere in maniera iterativa. Partiamo dall'equazione differenziale:

$$(i\partial_x - m_0) S(x, y; \phi) = \delta^4(x - y) - g_0 \gamma_5 \phi(x) S(x, y; \phi) \quad (11.30)$$

In forma integrale l'equazione diventa:

$$S(x, y; \phi) = S^0(x - y) - g_0 \int dz S^0(x - z) \gamma_5 \phi(z) S(z, y; \phi) \quad (11.31)$$

come si può vedere applicando ad entrambi i membri l'operatore $i\partial_x - m_0$. Possiamo calcolare il termine al prim'ordine in g_0 sostituendo $S(x, y; \phi)$ con $S^0(x - y)$ nell'integrale:

$$S(x, y; \phi) \simeq S^0(x - y) - g_0 \int dz S^0(x - z) \gamma_5 \phi(z) S^0(z - y) \quad (11.32)$$

Per iterazione otteniamo tutti i termini successivi. In termini di diagrammi, a partire dal propagatore libero otteniamo tutte le inserzioni successive del vertice $g_0 \gamma_5 \phi(z)$. Ad esempio al secondo ordine avremo il termine:

$$g_0^2 \int dz_1 dz_2 S^0(x - z_1) \gamma_5 \phi(z_1) S^0(z_1 - z_2) \gamma_5 \phi(z_2) S^0(z_2 - y) \quad (11.33)$$

Nello sviluppo completo dell'integrale funzionale, questi diagrammi andranno combinati con quelli che saltano fuori dallo sviluppo del termine di autointerazione $\lambda_0 \phi^4$, in maniera tale da saturare tutte le zampe esterne dei vertici $g_0 \gamma_5 \phi$. Tutti i diagrammi vuoto-vuoto vengono al solito cancellati dalla normalizzazione.

11.5 Determinante funzionale e loop

Inoltre abbiamo anche il contributo del termine $\det D(\phi)$. Dobbiamo capire com'è definito matematicamente il determinante di un operatore differenziale come $D(\phi)$. Possiamo pensarlo come il prodotto di tutti gli autovalori di $D(\phi)$. Ma questo è un prodotto infinito, perché l'operatore $D(\phi)$ ha uno spettro infinito! Tuttavia, ricordiamoci che il funzionale generatore va normalizzato, e che possiamo servirci di questa possibilità per cercare di mettere a fattore degli infiniti e cancellarli. Per capire meglio la situazione, facciamo l'esempio di un operatore con spettro noto: prendiamo in considerazione l'equazione di Schrödinger. L'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$ definito sulle funzioni limitate ad un segmento $[0, L]$ che si annullano ai bordi ha uno spettro superiormente illimitato formato da tutti i valori $\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ al variare di n nei reali. Ovviamente il prodotto di tutti questi autovalori è infinito. Ma supponiamo di considerare invece l'operatore $-\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2$: i suoi autovalori saranno $\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega^2$, e otteniamo anche qui un prodotto infinito... Ma se normalizziamo il prodotto con quello per $\omega = 0$ ecco che i conti tornano:

$$\frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega^2 \right)}{\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{L^2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{n^2\pi^2} \right) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{n^2\pi^2} \right)} \quad (11.34)$$

Abbiamo così un forte indizio per arrivare ad una definizione per il determinante funzionale. La definizione adatta ai nostri scopi viene dall'identità:

$$\det A = e^{\text{Tr} \log A} \quad (11.35)$$

Tuttavia dobbiamo far corrispondere al nostro operatore differenziale una matrice. Come si fa? Basta moltiplicarlo per $\delta^4(x - y)$. Infatti l'operatore integrale:

$$K(x - y) = (i\partial_x - m_0 + g_0 \gamma_5 \phi(x)) \delta^4(x - y) \quad (11.36)$$

è tale che la sua applicazione $\int d^4 y K(x - y) \psi(y)$ riproduce l'azione di $D(\phi)$ sullo spinore $\psi(x)$. Dobbiamo a questo punto cercare di fattorizzare

il termine infinito che ha origine nell'operatore libero ($i\partial_x - m_0$). Mettiamo questo pezzo in evidenza:

$$K(x - y) = (i\partial - m_0) [\delta^4(x - y) + g_0 S_0(x - y) \gamma_5 \phi(y)] \quad (11.37)$$

Il primo pezzo contiene l'infinito, che possiamo annullare con la normalizzazione (tanto è una costante rispetto alla misura dell'integrale funzionale). Il secondo pezzo invece è quello interessante. Questo possiamo farlo perché sappiamo che il determinante di un prodotto è uguale al prodotto dei determinanti. Inoltre il termine interessante può essere sviluppato facilmente perché ha una struttura del tipo $I + g_0 B$:

$$\begin{aligned} \det(I + g_0 B) &= e^{\text{Tr} \log(I + g_0 B)} = e^{\text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} g_0^n B^n} = \\ &= e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} g_0^n \text{Tr} B^n} \end{aligned} \quad (11.38)$$

Ci manca di sviluppare l'esponenziale, ma questo è facile. Guardiamo piuttosto alla struttura del termine B^n :

$$B_{ij} = S_{ij}^0(x - y) \gamma_5 \phi(y) \quad (11.39)$$

Moltiplicando più di questi termini e con la traccia alla fine, otteniamo dei loop fermionici ad n vertici. Un loop ad n vertici ha n zampe bosoniche libere che fuoriescono. Dunque il determinante porta come contributo tutti i loop fermionici. Cosa sarebbe cambiato se avessimo quantizzato dei bosoni? Il determinante viene fuori dall'integrazione grassmanniana; utilizzando le tecniche di calcolo ordinarie lo avremmo avuto a denominatore; questo corrisponderebbe ad un segno meno all'esponenziale e spiega la differenza di segno fra loop fermionici e bosonici nelle regole di Feynman.

12 Quantizzazione delle teorie di gauge

12.1 Brevissimi richiami sulle teorie di Yang-Mills

Le teorie di gauge si basano sull'invarianza della lagrangiana sotto un gruppo G di trasformazioni locali $\Omega(x)$. Nel caso di tutti i gruppi di gauge interessanti per la fisica, queste trasformazioni possono essere rappresentate in forma esponenziale tramite una base di generatori λ_a caratterizzata dalle regole di commutazione $[\lambda_a, \lambda_b] = if_{abc}\lambda_c$ dove le costanti f_{abc} , completamente antisimmetriche, sono dette costanti di struttura del gruppo. Scegliamo per la base a normalizzazione $\text{Tr} \lambda_a \lambda_b = \delta_{ab}/2$. I gruppi di gauge commutativi, come $U(1)$, sono detti abeliani. Per ogni generatore ho un campo di gauge A_μ^a associato nella mia teoria. La lagrangiana associata al campo di gauge $A_\mu = \lambda_a A_\mu^a$ è la seguente:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} \text{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + i[A_\mu, A_\nu] \end{aligned} \tag{12.1}$$

La traccia è estesa agli indici del gruppo. Sotto una trasformazione locale $\Omega(x)$ del gruppo, il campo di gauge e il tensore $F_{\mu\nu}$ si trasformano nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow \Omega(x) A_\mu(x) \Omega^\dagger(x) + i\Omega(x) \partial_\mu \Omega^\dagger(x) \\ F_{\mu\nu} &\rightarrow \Omega(x) F_{\mu\nu} \Omega^\dagger(x) \end{aligned} \tag{12.2}$$

La seconda proprietà di trasformazione è ricavabile dalla prima e, grazie alla proprietà della traccia, rende invariante la lagrangiana del campo sotto trasformazioni di gauge. I termini della lagrangiana relativi ai campi di materia sono resi invarianti sostituendo la derivata ordinaria con la derivata covariante. Questa sostituzione dà vita ai termini di accoppiamento fra i campi di materia e i campi di gauge.

12.2 Misura invariante

Consideriamo un gruppo (ad esempio $SU(N)$) e la base di generatori λ_α con $\alpha = 1, \dots, N^2 - 1$. Ogni generatore è esprimibile come combinazione lineare

delle matrici λ_α : $g = g^\alpha \lambda_\alpha$. Possiamo pensare ad una mappa invertibile del tipo:

$$g^{(3)}(g^{(1)}, g^{(2)}) = (g^{(1)} \circ g^{(2)})(g^{(1)}, g^{(2)}) \quad (12.3)$$

È un'operazione in generale molto complessa. Il senso è che, dato un gruppo, possiamo pensare ad una funzione che ad ogni suo elemento associa un numero. Questa funzione può essere pensata come una funzione numerica sulle coordinate g_α , i cui valori sono indipendenti dalla parametrizzazione scelta per i generatori (poiché dipende solo dall'elemento del gruppo che le coordinate identificano). Data una funzione di questo tipo, possiamo pensare anche di integrarla sul gruppo:

$$\int_G d\mu(g) f(g) \quad (12.4)$$

Per far sì che questo oggetto sia invariante, nozione importante quando si parla di teorie di gauge, dobbiamo introdurre il concetto di misura invariante. Ovvero una misura tale che:

$$\int_G d\mu(g) f(g) = \int_G d\mu(g) f(\tilde{g} \circ g) \quad (12.5)$$

In teoria dovremmo differenziare le misure invarianti a sinistra e a destra, a seconda ordine utilizziamo per il prodotto. Per i gruppi compatti le due definizioni coincidono. Partendo dalla definizione vogliamo trovare una condizione che ci permetta di stabilire se una data misura è invariante, dunque cambiamo coordinate nel membro di destra: $g \rightarrow g' = \tilde{g} \circ g$. La trasformazione è globalmente invertibile: $g = \tilde{g}^{-1} \circ g'$, e nell'integrale dovremo inserire il suo jacobiano:

$$\begin{aligned} \int_G d\mu(g) f(\tilde{g} \circ g) &= \int_G \mu(g) d^n g f(\tilde{g} \circ g) = \\ &= \int_G \mu(\tilde{g}^{-1} \circ g') \left| \frac{\partial(\tilde{g}^{-1} \circ g')}{\partial g'} \right| d^n g' f(g') = \\ &= \int_G \mu(\tilde{g}^{-1} \circ g) \left| \frac{\partial(\tilde{g}^{-1} \circ g)}{\partial g'} \right| d^n g f(g) \end{aligned} \quad (12.6)$$

Poiché l'uguaglianza dev'essere valida per ogni funzione $f(g)$, otteniamo, ponendo inoltre $\tilde{g} = g$:

$$\mu(g) = \mu(0) \left| \frac{\partial(\tilde{g}^{-1} \circ g)}{\partial g'} \right|_{\tilde{g}=g} \quad (12.7)$$

12.3 Metodo di Faddeev-Popov

L'azione di Yang-Mills per un campo di gauge è:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \int d^4 x \operatorname{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int d^4 x F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^b \operatorname{Tr} \lambda_a \lambda^b = \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4 x F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \end{aligned} \quad (12.8)$$

Ora vogliamo approssciare le teorie di gauge, abeliane e non, tramite il metodo dell'integrale funzionale. Il prototipo di integrale che la teoria ci sottopone è il seguente:

$$\int \delta A e^{iS(A)} \quad (12.9)$$

Questo integrale presenta vari problemi. Il primo riguarda la i all'esponente e, come già visto, lo si risolve passando all'euclideo (il che comporta, notiamo, il passaggio formale $A_M^0 = iA_E^0$ per la componente temporale del campo di gauge). Il secondo e nuovo problema è il fatto che la misura di integrazione è estesa a classi di configurazioni del campo A_μ collegate da trasformazioni di gauge e dunque tali da lasciare invariata l'azione così come i valori di qualsiasi osservabile $O(A)$. Queste infinite repliche portano l'integrale ad essere infinito e non sono ovviamente rimosse dalla sua regolarizzazione. Ci troviamo davanti ad un nuovo problema, caratteristico delle teorie di gauge. Ancora una volta dobbiamo cercare di fattorizzare i contributi infiniti, questa volta dovuti all'invarianza di gauge, ed eliminarli grazie alle cancellazioni permesse dalla normalizzazione al denominatore.

Le famiglie di punti di integrazione che sono equivalenti essendo collegati da una trasformazione di gauge vengono dette orbite di gauge. Naturalmente non tutte le possibili configurazioni del campo A_μ giacciono sulla stessa orbita di gauge. Inoltre le orbite non possono intersecarsi. In sostanza tutto lo spazio di integrazione è suddiviso in maniera naturale da queste orbite che corrispondono ognuna ad una diversa configurazione fisica: ovvero ad ogni orbita di gauge corrisponde una configurazione osservabile sperimentalmente

del campo A_μ , e viceversa. La misura di integrazione però non corre solo su tutte le possibili configurazioni contandole una volta ognuna, ma percorre anche completamente ogni singola orbita di gauge. Il problema è quindi quello di trovare una superficie di integrazione, una sezione, che intersechi ogni orbita una volta sola. Non sempre questa situazione, che è quella ottimale, è raggiungibile. Nel caso delle teorie di gauge abeliane, si verifica il caso di intersezioni multiple fra le orbite di gauge e la superficie di integrazione che ora introdurremo. Discuteremo questo caso alla fine. Notiamo che il numero di intersezioni con ogni orbita deve essere indipendente dalla scelta dell'ipersuperficie di integrazione, altrimenti la fisica cambierebbe a seconda della scelta fatta. La superficie di integrazione di cui parliamo è nota come superficie di gauge-fixing. Di fatto la scelta di una superficie di integrazione corrisponde alla scelta di una gauge: dovremo quindi accertarci, strada facendo, che i risultati del procedimento di gauge-fixing siano comunque invarianti di gauge così come la teoria richiede. D'ora in poi indicheremo con A^Ω il campo trasformato di gauge con trasformazione $\Omega(x)$.

Una superficie di gauge-fixing sarà definita in modo implicito tramite una relazione $f(A) = 0$; tuttavia, per ogni A tale che $f(A) \neq 0$ sarà possibile trovare una trasformazione Ω tale da portare il campo sulla superficie di gauge-fixing. Inoltre avremo un'equazione per ogni punto dello spazio-tempo, e f dovrà avere tante componenti indipendenti quante la matrice Ω , cioè $N^2 - 1$. Per definire la superficie dunque abbiamo un'equazione del tipo

$$f_a(A^\Omega, x) = 0 \tag{12.10}$$

con $a = 1, \dots, N^2 - 1$. Per brevità indicheremo ora con \bar{A} una configurazione del campo che giace sulla superficie di gauge-fixing.

Abbiamo un metodo, il metodo di Faddeev e Popov, che consente di rimuovere l'infinito da questi integrali funzionali. Questo si fa in due passaggi: innanzitutto separiamo la misura di integrazione in due parti: $\delta A \rightarrow \delta\Omega \delta\bar{A}$, una contenente solo le configurazioni fisicamente distinguibili e l'altra tutta la ridondanza di gauge. Questo si dovrà fare limitando in qualche modo il dominio di integrazione alla superficie di gauge-fixing con un qualche tipo di funzione delta. Una volta fatto ciò, bisognerà mostrare che l'integrando residuo è composto solo da quantità gauge-invarianti e dunque banale rispetto all'integrazione in Ω . Questo consente di fattorizzare e rimuovere la parte indesiderata dell'integrale.

Quello che dobbiamo fare è imparare a selezionare solo i punti di integrazione giusti. Questo lo si fa tramite una delta di Dirac funzionale ∞ -dimensionale

$\delta[f(A)]$, che contiene il prodotto di funzioni delta di Dirac su tutti i punti dello spazio-tempo e su tutti i possibili valori di a . Al variare di Ω su un'orbita $\delta[f(A)]$ sarà sempre nulla finché non incontriamo proprio il punto selezionato dalla scelta della gauge. Tuttavia per fare ciò è necessario integrare su tutte le possibili Ω . Qui entra in gioco la misura invariante su un gruppo:

$$\delta\Omega = \prod_x \mu(g(x)) d^{N^2-1} g(x) \quad (12.11)$$

Abbiamo l'integrale:

$$\int \delta\Omega \delta[f(A^\Omega)] = \frac{1}{\Delta_f(A)} \quad (12.12)$$

dove abbiamo introdotto la quantità $\Delta_f(A)$ detta determinante di Faddeev e Popov. È semplicemente un modo per battezzare il valore assunto dall'integrale scritto. Il determinante di Faddeev e Popov ha la proprietà di essere invariante di gauge nonostante dipenda dalla superficie di gauge-fixing. Grazie al fatto di avere una misura invariante: $\Delta_f(A^\Omega) = \Delta_f(A)$. Procediamo quindi a calcolare il valore di aspettazione di una qualche osservabile O , come al solito lasciando implicita la normalizzazione a denominatore⁹:

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_f &= \int \delta A e^{-S(A)} O(A) = \int \delta A e^{-S(A)} O(A) \int \delta\Omega \delta[f(A^\Omega)] \Delta_f(A) = \\ &= \int \delta\Omega \int \delta A e^{-S(A)} O(A) \delta[f(A^\Omega)] \Delta_f(A) = \dots \end{aligned} \quad (12.13)$$

...non abbiamo fatto altro che inserire l'unità nell'integrale e invertire l'ordine di integrazione. Ora però notiamo che nessun termine nell'integrando dipende da Ω ! Infatti, supponiamo di cambiare variabile di integrazione $A \rightarrow A' = A^\Omega$: la misura di integrazione non cambia, perché la trasformazione di gauge del campo A consiste di una rotazione ortogonale e di una parte costante, e dunque ha jacobiano unitario; inoltre la delta di Dirac funzionale è già espressa in funzione di A' e tutti gli altri termini (azione $S(A)$, operatore O e determinante di Faddeev-Popov) sono invarianti di gauge... dunque ...

⁹che si ottiene, in questo come in altri casi, prendendo il limite del numeratore per $O \rightarrow 1$.

$$\dots = \int \delta\Omega \int \delta A' e^{-S(A')} O(A') \delta[f(A')] \Delta_f(A') \quad (12.14)$$

In questo modo siamo riusciti a fattorizzare l'integrazione in $\delta\Omega$, che è diventata banale. Chiaramente ora l'integrale può essere di nuovo riespresso in A invece che in A' . In maniera simile, con gli stessi trucchetti, si può mostrare che $\langle O \rangle_f = \langle O \rangle_g$, e cioè che con questo metodo otteniamo dei risultati per le osservabili indipendenti dalla superficie che scegliamo per fissare la gauge, così come dev'essere. Dunque abbiamo posto delle buone basi per poter affrontare le teorie di gauge con metodi funzionali. Questo è stato possibile al costo di introdurre il termine di Faddeev-Popov nell'integrale funzionale; vedremo ora cosa questo comporta nel caso abeliano e non.

12.4 Determinante di Faddeev-Popov

12.4.1 Caso abeliano

Vediamo prima il caso semplice, quello abeliano. La superficie di gauge-fixing è definita dalla condizione:

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \quad (12.15)$$

La trasformazione di gauge in questo caso è del tipo $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$. Esiste sempre Λ tale che $\partial_\mu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) = \partial_\mu A_\mu + \square \Lambda = 0$, basta infatti prendere:

$$\Lambda(x) = \int d^4 y G(x-y) \partial_\mu A_\mu(y) \quad \text{con} \quad G(x-y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2} \quad (12.16)$$

In questo caso la 12.12 diventa:

$$\Delta_f(A) \int \delta\Lambda \delta(\partial_\mu A_\mu + \square\Lambda) = 1 \quad (12.17)$$

Questo caso è semplice perché il risultato dell'integrale non dipende da A , come si può vedere da un'analogia con un integrale simile in una dimensione:

$$\int d^n \lambda \delta(\bar{\lambda} + \Theta\lambda) = \frac{1}{|\det \Theta|} \quad (12.18)$$

per le proprietà della delta di Dirac. Dunque abbiamo:

$$\Delta_f(A) \int \delta\Lambda \delta(\partial_\mu A_\mu + \square\Lambda) = \frac{\Delta_f(A)}{|\det \square|} = 1 \quad \rightarrow \quad \Delta_f(A) = |\det \square| \quad (12.19)$$

Dunque per una teoria di gauge abeliana il fattore di Faddeev-Popov è una costante e dunque è irrilevante ai fini della teoria delle perturbazioni. Per le teorie non abeliane la storia è più complicata.

12.4.2 Caso non-abeliano: i ghost

I campi di gauge sono:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \lambda_a A_\mu^a(x) \\ A_\mu^\Omega(x) &= \Omega(x) A_\mu(x) \Omega^\dagger(x) + i\Omega(x) \partial_\mu \Omega^\dagger(x) \end{aligned} \quad (12.20)$$

Consideriamo trasformazioni infinitesime: $\Omega(g) \simeq 1 + g_a(x) \lambda^a$. L'espressione per il campo trasformato diventa allora:

$$A_\mu^\Omega(x) = A_\mu(x) + i[g(x), A_\mu(x)] + \partial_\mu g(x) \quad (12.21)$$

Notiamo subito che rispetto al caso abeliano l'espressione del campo di gauge trasformato ha un termine aggiuntivo; questo è il segnale che il campo porta una carica ed interagisce con sé stesso. In componenti abbiamo:

$$\begin{aligned} A_\mu^{\Omega a}(x) \lambda_a &= A_\mu^a(x) \lambda_a + i g^b(x) A_\mu^c(x) [\lambda_b, \lambda_c] + \lambda_a \partial_\mu g^a(x) = \\ &= A_\mu^a(x) \lambda_a - f_{bca} g^b(x) A_\mu^c(x) \lambda_a + \lambda_a \partial_\mu g^a(x) \end{aligned} \quad (12.22)$$

$$\rightarrow A_\mu^{\Omega a}(x) = A_\mu^a(x) - f_{abc} g^b(x) A_\mu^c(x) + \partial_\mu g^a(x) \quad (12.23)$$

Dunque, nel caso di intersezioni uniche, trasformazioni infinitesime e per una configurazione tale che $\partial_\mu A_\mu = 0$ ¹⁰, la relazione 12.12 diventa:

$$\Delta_{\partial A}(A) \int \mu(g) \delta g \delta[\square g_a - f_{abc} \partial_\mu (A_\mu^c g^b)] = 1 \quad (12.24)$$

¹⁰grazie al fatto che il determinante di Faddeev-Popov è invariante di gauge, possiamo scegliere di calcolarlo intorno a $\Omega = 1$ per semplificare i calcoli.

Abbiamo un'integrale di una delta di Dirac di un operatore lineare che agisce su g^b . In analogia con la proprietà della delta di Dirac per la quale:

$$\delta[F(x)] = \frac{\delta(x - x_0)}{|F'(x_0)|} \quad \text{con } x_0 \text{ t.c. } F(x_0) = 0 \quad (12.25)$$

dobbiamo trovare i valori di g che annullano l'azione di questo operatore. L'unica soluzione accettabile è data da $g = 0$ (escludiamo la soluzione g costante perché non vogliamo considerare le trasformazioni globali ma solo quelle di gauge). Dunque abbiamo:

$$\Delta_{\partial A}(A) = |\det(\square\delta_{ab} - f_{abc}\partial_\mu A_\mu^c)| \quad (12.26)$$

Come vediamo ora il determinante dipende dal campo di gauge e non è un semplice fattore moltiplicativo nell'integrale funzionale. . . Un primo problema da affrontare è la presenza del modulo, senza il quale potremmo riarrangiare questo determinante come un integrale gaussiano nel funzionale generatore. Il segno del determinante non è un problema, l'importante è che questo non si annulli mai. È così? Solo nel caso di intersezioni uniche, ovvero solo se la soluzione dell'equazione $\partial_\mu A_\mu^\Omega = 0$ è unica in Ω . Il determinante si annulla solo se uno dei suoi autovalori è nullo, ma questo implica che $\square g^a = f_{abc}\partial_\mu(A_\mu^c g^b)$ e quindi anche l'esistenza di una nuova trasformazione tale che $\partial_\mu A_\mu = 0$. Ne dobbiamo dedurre che il determinante può cambiare segno solo in presenza di punti di tangenza fra l'orbita di gauge e l'ipersuperficie di gauge-fixing. Questa è una situazione critica che scartiamo, e che discuteremo quando parleremo di intersezioni multiple. Dunque assumiamo che il determinante abbia un segno fissato, ed eliminiamo il modulo. È ininfluente determinare quale sia il segno: possiamo comunque interpretare la presenza di questo determinante nell'integrale funzionale come il risultato di un'integrazione gaussiana su variabili grassmanniane di tipo complesso:

$$\begin{aligned} \det(\square\delta_{ab} - f_{abc}\partial_\mu A_\mu^c) &= \int \delta\bar{c} \delta c \, e^{\int \bar{c}^a (\square c_a - f_{abc}\partial_\mu A_\mu^c)} = \\ &= \int \delta\bar{c} \delta c \, e^{-\int \partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a - f_{abc}\partial_\mu \bar{c}^a A_\mu^c c^b} \end{aligned} \quad (12.27)$$

Abbiamo introdotto i cosiddetti ghost: dei campi non osservabili che compaiono in teoria delle perturbazioni solo nei loop interni ai diagrammi e che servono per cancellare dei contributi non fisici che avrebbero rotto

l'invarianza di gauge delle osservabili O . I campi c sono scalari e di massa nulla e hanno un vertice di interazione con il campo di gauge.

12.5 Funzionale generatore per un campo di gauge

Ritorniamo ora alla questione del calcolo del funzionale generatore per una teoria di gauge abeliana. Per la presenza della delta di Dirac funzionale che restringe la gauge, questo integrale non è puramente gaussiano:

$$Z(J) = \int \delta A e^{-\frac{1}{4} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int J_\mu A_\mu} \delta(\partial_\mu A_\mu) \quad (12.28)$$

La tecnica per calcolare questo tipo di integrali è interessante e coinvolge i moltiplicatori di Lagrange. Innanzitutto usiamo per la delta di Dirac una rappresentazione integrale:

$$\prod_x \delta[\partial_\mu A_\mu(x)] = \int \delta\lambda e^{i \int d^4 x \lambda(x) \partial_\mu A_\mu(x)} \quad (12.29)$$

Il funzionale generatore diventa ora gaussiano se consideriamo la coppia di variabili A, λ :

$$\begin{aligned} Z(J) &= \int \delta A \delta\lambda e^{-\frac{1}{4} \int (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2 + \int J_\mu A_\mu + i \int \lambda \partial_\mu A_\mu} = \\ &= \int \delta A \delta\lambda e^{-\frac{1}{2} \int (\partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} \int \partial_\nu A_\mu \partial_\mu A_\nu + \int J_\mu A_\mu + i \int \lambda \partial_\mu A_\mu} = \\ &= \int \delta A \delta\lambda e^{-\frac{1}{2} \int (\partial_\nu A_\mu)^2 + \int (J_\mu - i\partial_\mu \lambda) A_\mu} = \dots \end{aligned} \quad (12.30)$$

... nel calcolo abbiamo integrato per parti due volte il termine $\partial_\nu A_\mu \partial_\mu A_\nu$ ottenendo $(2\partial_\mu A_\mu)^2$, che può essere trascurato vista la nostra scelta di gauge, e una volta il termine $\lambda \partial_\mu A_\mu$. Non ci resta che completare il quadrato e integrare in δA ottenendo ...

$$\dots = \int \delta\lambda e^{\frac{1}{2} \int (J_\mu(x) - i\partial_\mu \lambda(x)) G_0(x-y) (J_\mu(y) - i\partial_\mu \lambda(y))} \quad (12.31)$$

$$G_0(x-y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2} \quad (12.32)$$

Ora rimane l'integrale in $\delta\lambda$ che è gaussiano! Non possiamo sfruttare l'invarianza sotto traslazioni, come usualmente si fa, perché λ compare sotto derivazione. Sviluppiamo l'esponente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int J_\mu(x) G_0(x-y) J_\mu(y) - i \int J_\mu(x) G_0(x-y) \partial_\mu \lambda(y) - \frac{1}{2} \int \partial_\mu \lambda(x) G_0(x-y) \partial_\mu \lambda(y) = \\ & \frac{1}{2} \int J_\mu(x) G_0(x-y) J_\mu(y) - i \int J_\mu(x) G_0(x-y) \partial_\mu \lambda(y) - \frac{1}{2} \int \lambda(x) \partial_\mu^x \partial_\mu^y G_0(x-y) \lambda(y) \end{aligned} \quad (12.33)$$

Il primo termine, notiamo, è costante rispetto all'integrazione in $\delta\lambda$. Il termine centrale viene dall'unione di due termini simmetrici sotto lo scambio $x \leftrightarrow y$, e può essere integrato per parti per far agire la derivata su G_0 . Anche l'ultimo può essere infine integrato due volte per parti col risultato di far agire entrambe le derivate su G_0 . Svolgiamo le derivate:

$$\partial_\mu^x \partial_\mu^y G_0(x-y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (iq_\mu) (-iq_\mu) \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-y)} = \delta^4(x-y) \quad (12.34)$$

Dunque il termine quadratico in λ è semplicissimo! Il funzionale generatore a questo punto è diventato:

$$Z(J) = e^{\frac{1}{2} \int J_\mu(x) G_0(x-y) J_\mu(y)} \int \delta\lambda e^{-\frac{1}{2} \int \lambda^2 + i \int J_\mu(x) \partial_\mu^y G_0(x-y) \lambda(y)} \quad (12.35)$$

Ora dobbiamo risolvere l'integrale gaussiano in λ . L'estremo dell'esponente si ha per:

$$\bar{\lambda}(y) = 2i \int d^4 x J_\mu(x) \partial_\mu^y G_0(x-y) \quad (12.36)$$

Pongo dunque $\lambda = \bar{\lambda} + \eta$ con η nuova variabile di integrazione. Sapendo che i termini lineari in η si compensano e che l'integrale quadratico in η si può semplificare con la normalizzazione, e inoltre sviluppando e sommando i termini rimanenti in $\bar{\lambda}$ abbiamo che:

$$Z(J) = e^{\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J_\mu(x) G_0(x-y) J_\mu(y) - \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y d^4 z J_\mu(x) \partial_\mu^y G_0(x-y) J(z) \partial_\nu^y G_0(z-y)} \quad (12.37)$$

Nel secondo termine dell'esponente possiamo integrare in $d^4 y$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4 y \partial_\mu^y G_0(x-y) \partial_\nu^y G_0(x-y) = \int d^4 y \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} (-iq_{1\mu}) (-iq_{2\nu}) \frac{e^{iq(x-y)}}{q_1^2} \frac{e^{iq(z-y)}}{q_2^2} = \\
& = - \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{q_{1\mu} q_{2\nu}}{q_1^2 q_2^2} \delta^4(q_1 + q_2) e^{i(q_1 x + q_2 z)} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} e^{iq(x-z)} \equiv \\
& \equiv G_{\mu\nu}(x-z)
\end{aligned} \tag{12.38}$$

Il funzionale generatore a questo punto è:

$$\begin{aligned}
Z(J) &= e^{\frac{1}{2} \int J_\mu(x) G(x-y) J_\mu(y) - J_\mu(x) G_{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y)} = \\
&= e^{\frac{1}{2} \int J^\mu(x) [\delta_{\mu\nu} G(x-y) - G_{\mu\nu}(x-y)] J^\nu(y)}
\end{aligned} \tag{12.39}$$

Il termine fra parentesi è proprio il propagatore trasverso del bosone di gauge, come si può dedurre facilmente calcolando la funzione a due punti $\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$ con questo funzionale generatore. Il propagatore risulta essere:

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2} \right] e^{iq(x-y)} \tag{12.40}$$

A questo punto vogliamo mostrare brevemente una tecnica più generale, applicandola inoltre al caso di una teoria di gauge non-abeliana. Vogliamo mostrare che a volte risulta comodo integrare anche sulla direzione trasversa alla gauge scelta. Consideriamo una gauge definita dalla condizione $\partial_\mu A_\mu^a(x) = \Lambda^a(x)$. Il valore di aspettazione euclideo di un'osservabile locale O sarà allora:

$$\langle O \rangle = \int \delta A e^{-S_E(A)} \Delta_{\partial A = \Lambda}(A) \delta[\partial_\mu A_\mu - \Lambda] O(A) \tag{12.41}$$

Per quanto riguarda il fattore di Faddeev-Popov, lo possiamo riscrivere genericamente come $\det[\partial D(A)]$. Sappiamo poi che il risultato non può dipendere da Λ perché è una quantità gauge-invariante; possiamo utilizzare il trucco matematico di introdurre un'integrazione in $\delta\Lambda$ con un peso gaussiano. In questo modo integriamo su tutte le orbite, ma con un peso che va rapidamente a zero; questo è l'equivalente al passaggio all'azione di Fermi in

QED, ed è un procedimento analogo al cambio dall'ensamble microcanonico a quello canonico (molto alla larga ...). Risulta cioè:

$$\begin{aligned}
\langle O \rangle &= \int \delta A e^{-S_E(A)} \det[\partial D(A)] \delta[\partial_\mu A_\mu - \Lambda] O(A) = \\
&= \int \delta \Lambda \int \delta A e^{-S_E(A)} \det[\partial D(A)] \delta[\partial_\mu A_\mu - \Lambda] O(A) e^{-\frac{1}{2\alpha} \int \Lambda^2} = \\
&= \int \delta A e^{-S_E(A)} \det[\partial D(A)] O(A) e^{-\frac{1}{2\alpha} \int (\partial_\mu A_\mu)^2}
\end{aligned}
\tag{12.42}$$

12.6 Problema di Gribov

L'ultima questione rimasta sulla quantizzazione delle teorie di gauge è quella riguardante la possibilità dell'esistenza di intersezioni multiple fra le orbite di gauge e la superficie di gauge-fixing. In base a teoremi topologici si può in effetti dimostrare che nel caso non-abeliano l'equazione $\partial_\mu A_\mu^\Omega = 0$ ha più di una soluzione in Ω . Questo significa che il metodo di Faddeev-Popov non può essere correttamente applicato, perché non è sufficiente risolvere l'integrale per trasformazioni di gauge infinitesime attorno all'identità $\Omega = 1$. Il problema in teoria delle perturbazioni è comunque trascurabile perché espandendo intorno ad $A = 0$, gli effetti delle intersezioni multiple si incontrano solo ad ordini molto lontani. Però eventuali argomenti non-perturbativi, come l'espressione del funzionale generatore in funzione dei ghost, potrebbero non essere più validi. Si può però congetturare con solidi argomenti che le intersezioni multiple portano contributi con segni alterni in numero tale da portare, alla fine, sempre un contributo totale pari a quello della prima intersezione. Questo fatto è stato dimostrato però sfruttando delle configurazioni di A_μ sufficientemente differenziabili, mentre in realtà la misura di integrazione δA è centrata su distribuzioni.

13 Simmetrie

13.1 Teorema di Noether

Il teorema di Noether ci permette di associare alle simmetrie presenti in una teoria delle quantità conservate lungo il moto. Diciamo che in una teoria è presente una determinata simmetria se l'azione è invariante sotto certe trasformazioni: $S(\phi + \delta\phi) = S(\phi)$ per qualsiasi configurazione del campo ϕ ¹¹. Parliamo qui di simmetrie globali, non locali, e continue, ovvero parametrizzabili in forma infinitesima tramite un parametro di dimensione opportuna: $\delta\phi = g_a F^a(\phi)$. Per ricavare l'esistenza di una carica conservata associata ad una simmetria globale, supponiamo che i parametri della trasformazione dipendano dal punto dello spazio-tempo: $g^a \rightarrow g^a(x)$ ¹². Sappiamo che la variazione dell'azione $\delta S(\phi) = S(\phi + \delta\phi) - S(\phi)$ è nulla per g^a costanti, e dunque dovrà essere proporzionale alla loro derivata. Inoltre questa variazione è in ogni caso nulla se consideriamo i campi che sono la soluzione delle equazioni del moto. Si ha quindi, con un'integrazione per parti di mezzo:

$$\delta S(\phi) = \int d^4x \partial_\mu g^a(x) J_a^\mu(x) = - \int d^4x g^a(x) \partial_\mu J_a^\mu(x) = 0 \rightarrow \partial_\mu J_a^\mu(x) = 0 \quad (13.1)$$

Le quantità J_μ^a sono proprio le correnti di Noether conservate.

13.2 Simmetrie $SO(N)$

Il gruppo $SO(N)$ è costituito da tutte le matrici ortogonali a determinante unitario: $O^T O = I, \det O = 1$. Una lagrangiana scalare rinormalizzabile e invariante sotto le trasformazioni di $SO(N)$, $\phi_i(x) \rightarrow O_{ij} \phi_j(x)$, è la seguente:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{m_0^2}{2} \phi_i \phi_i - g_0 (\phi_i \phi_i)^2 \quad (13.2)$$

¹¹e non solo lungo le equazioni del moto.

¹²Non dobbiamo confonderci e pensare che stiamo considerando le trasformazioni di gauge della teoria. Ad esempio, per la QED abbiamo invarianza sotto le trasformazioni locali $\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi$, $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$. A questa invarianza ne è associata una globale con α costante: $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$, $A_\mu \rightarrow A_\mu$, alla quale possiamo applicare il teorema di Noether. Questo però non lo facciamo tornando alla trasformazione locale, ma introducendo artificialmente una dipendenza da x nelle trasformazioni globali, ovvero prendendo $\delta A_\mu = 0, \delta\psi = i\alpha(x)\psi$.

Le matrici O sono rappresentabili in forma esponenziale $O = e^g$ con $g^T = -g$ e $\text{Tr } g = 0$ ¹³. Quanti parametri liberi ha la matrice g ? Essendo antisimmetrica, dobbiamo togliere gli N elementi diagonali e dividere per due il numero totale di elementi N^2 della matrice. Dunque le matrici g sono rappresentabili in una base di $\frac{N(N-1)}{2}$ generatori antisimmetrici λ_a : $g = g_a \lambda_a$. Le trasformazioni infinitesime si scrivono nella forma:

$$O \simeq 1 + g_a \lambda_a \quad (13.3)$$

con $a = 1, \dots, \frac{N(N-1)}{2}$. La variazione del campo ϕ_i è di conseguenza:

$$\delta \phi_i(x) = g_a \lambda_{ij}^a \phi_j(x) \quad (13.4)$$

Come prescrive il teorema di Noether, ora facciamo finta che i parametri g_a dipendano da x e valutiamo la variazione dell'azione lungo le equazioni del moto. Se guardiamo i termini della lagrangiana, l'unico che non si annulla lungo la variazione $\delta \int d^4 x L$ è quello cinetico poiché risulta:

$$\delta(\phi_i \phi_i) = 2\phi_i \delta \phi_i = 2g_a \phi_i \lambda_{ij}^a \phi_j = 0 \quad (13.5)$$

essendo λ_{ij}^a antisimmetrica. Dunque:

$$\delta \int d^4 x L = \int d^4 x \partial_\mu \phi_i \partial^\mu g_a \lambda_{ij}^a \phi_j = \int d^4 x \partial^\mu g_a (\partial_\mu \phi) \lambda^a \phi \quad (13.6)$$

Per il teorema di Noether abbiamo le seguenti correnti conservate¹⁴:

$$J_\mu^a = (\partial_\mu \phi) \lambda^a \phi \quad (13.7)$$

In questa espressione per le correnti sono nascoste delle trappole se pensiamo ai dei campi quantistici; innanzitutto il prodotto fra ϕ e la sua derivata pone dei problemi di ordinamento, che per fortuna evitiamo visto che λ^a associa, essendo antisimmetrica e dunque avendo elementi nulli sulla diagonale, solo componenti diverse del campo ϕ . Però rimane il fatto che stiamo moltiplicando due operatori nello stesso punto. . . discuteremo tale questione nel seguito. Per ogni corrente possiamo costruire una carica conservata:

¹³le proprietà di g si ricavano da quelle di O .

¹⁴scritte in forma matriciale

$$Q^a = \int d^3x \pi_i(x) \lambda_{ij}^a \phi_j(x) \quad (13.8)$$

dove $\pi_i(x)$ è il momento coniugato a $\phi_j(x)$. Utilizzando i commutatori canonici 1.5 si possono derivare le seguenti regole di commutazione:

$$[Q^a, Q^b] = -f_{abc} Q^c \quad (13.9)$$

$$[Q^a, \phi(x)] = i\lambda_a \phi(x) \quad (13.10)$$

Gli operatori $e^{ig_a Q^a}$ forniscono in effetti una rappresentazione infinito dimensionale del gruppo G sullo spazio degli stati. Vogliamo qui riportare, perché sarà utile, il cosiddetto lemma di Schur: data una rappresentazione irriducibile $\{U(g)\}$, se un operatore commuta con tutti gli operatori della rappresentazione, $[A, U(g)] = 0 \forall g \in G$, allora A è un multiplo dell'operatore identità. Per capire le conseguenze di tali questioni di teoria dei gruppi sulla fisica, vediamo come agiscono gli operatori Q^a sugli stati, a partire dal vuoto. Vogliamo qui dimostrare che, per una teoria con mass gap¹⁵:

$$Q^a |0\rangle = 0 \quad (13.11)$$

Cominciamo con l'affermare che Q^a commuta con l'operatore 4-impulso P^μ : $[Q^a, P^\mu] = 0$. Infatti:

- per la componente temporale, questo segue direttamente dal teorema di Noether: essendo una quantità conservata, Q^a commuta con il generatore delle traslazioni temporali.
- per le componenti spaziali, si può verificare anche in questo caso che $e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{y}} Q^a e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{y}} = Q^a$, da cui si deduce che il commutatore $[P^i, Q^a]$ è nullo.

Quindi abbiamo:

$$P^\mu Q^a |0\rangle = Q^a P^\mu |0\rangle = 0 \quad (13.12)$$

Poiché per una teoria con mass-gap l'unico stato con 4-impulso nullo è lo stato di vuoto, se ne ricava che $Q^a |0\rangle = c |0\rangle$. A questo punto dobbiamo solo mostrare che la costante c è nulla. Ed è proprio così. Infatti abbiamo:

¹⁵nel caso di una teoria di massa nulla il ragionamento seguente potrà solo concludere che Q^a applicato al vuoto restituisce uno stato di 4-impulso nullo.

$$c = \langle 0 | Q^a | 0 \rangle = \int d^3 x \langle 0 | J_0^a | 0 \rangle = 0 \quad (13.13)$$

poiché l'integrale del valor medio di una corrente di Noether sul vuoto è sempre nullo. Infatti si può mostrare che $\langle 0 | J_\mu^a(0) | 0 \rangle = \langle 0 | \Lambda_\mu^\nu J_\nu^a(0) | 0 \rangle$ e un quadrivettore con questa proprietà non può essere altri che il vettore nullo. Se vogliamo, il fatto che $Q^a | 0 \rangle = 0$ per teorie con mass-gap è una prima dimostrazione del teorema di Goldstone visto che l'affermazione:

- se c'è mass gap, il vuoto è invariante.

è logicamente equivalente all'affermazione:

- se il vuoto non è invariante, non c'è mass gap.

Quanto detto ci mostra anche che $e^{iQ_a g^a} | 0 \rangle = | 0 \rangle$. Essendo il vuoto invariante, la rappresentazione è riducibile. Prendiamo ora gli stati di singola particella. La nostra teoria contiene N campi ϕ_i , che in principio rappresentano diverse particelle. Uno stato di singole particelle è tale che $P^\mu | \mathbf{p}, i \rangle = p^\mu | \mathbf{p}, i \rangle$. Dunque, poiché $[Q^a, P^\mu] = 0$:

$$Q^a | \mathbf{p}, i \rangle = \sum c_{ij} | \mathbf{p}, j \rangle \quad (13.14)$$

$$e^{i g_a Q^a} | \mathbf{p}, i \rangle = O_{ij} | \mathbf{p}, j \rangle \quad (13.15)$$

L'azione dell'operatore Q_a mischia le componenti relative alle diverse particelle. Restiamo sempre nel sottospazio degli stati di singola particella, il che ci fornisce una rappresentazione irriducibile del gruppo. Per il lemma di Schur tutti gli stati di singola particella hanno la stessa energia, visto che $[e^{i g_a Q^a}, H] = 0 \forall a$. Le masse della particelle sono realmente degeneri¹⁶ e i campi ϕ_i formano un multipletto. Con stati a più particelle abbiamo prodotti tensoriali di rappresentazioni irriducibili che si possono ridurre a somme dirette risolvendo problemi di scomposizioni analoghi a quelli per il momento angolare.

Vediamo infine quali considerazioni possiamo trarre dalla presenza di simmetrie a proposito dello spettro di massa della teoria. Sappiamo che queste si

¹⁶come vedremo, rimangono tali anche dopo la rinormalizzazione

deducono fundamentalmente dall'analisi della funzione di Green a due punti, $\langle 0 | \phi_i(x) \phi_j(y) | 0 \rangle$. Prendiamo sempre in analisi una teoria con mass-gap. Poiché $Q_a | 0 \rangle = 0$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle 0 | Q_a \phi_i(x) \phi_j(y) - \phi(x) \phi_j(y) Q_a | 0 \rangle = \\
&= \langle 0 | Q_a \phi_i(x) \phi_j(y) - \phi(x) Q_a \phi_j(y) | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_i(x) Q_a \phi_j(y) - \phi_i(x) \phi_j(y) Q_a | 0 \rangle = \\
&= \langle 0 | [Q_a, \phi_i(x)] \phi_j(y) | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_i(x) [Q_a, \phi_j(y)] | 0 \rangle = \\
&= i\lambda_{ik}^a \langle 0 | \phi_k(x) \phi_j(y) | 0 \rangle + i\lambda_{jk}^a \langle 0 | \phi_i(x) \phi_k(y) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{13.16}$$

Introduciamo la notazione $\langle 0 | \phi_k(x) \phi_j(y) | 0 \rangle = \Delta_{kj}(x-y)$. I Δ_{kj} possono essere pensati come le componenti di una matrice Δ . Con la nota convenzione del prodotto matriciale righe per colonne, abbiamo l'equazione:

$$\lambda^a \Delta(x-y) - \Delta(x-y) \lambda^a = 0 \quad \rightarrow \quad [\lambda^a, \Delta(x-y)] = 0 \tag{13.17}$$

Per il lemma di Schur, essendo le matrici λ^a i generatori della rappresentazione fondamentale del gruppo di simmetria $SO(N)$, la matrice $\Delta(x-y)$ è proporzionale all'identità. Questo ci dice che tutti i propagatori dei campi ϕ_i sono uguali, ovvero hanno lo stesso polo e anche lo stesso residuo Z . Questo ci dice che le masse rimarranno uguali anche dopo la rinormalizzazione. L'applicazione della teoria dei gruppi alla fisica è praticamente contenuta tutta in questo tipo di conti, che ovviamente può essere iterato anche per prodotti di più di due campi... le identità che si ottengono in questo modo sono una conseguenza di identità più generali molto utili nello studio delle teorie di campo anche nel caso in cui il vuoto non è invariante.

14 Identità di Ward

14.1 Proprietà di clustering

Le funzioni di Wightman fattorizzano per distanze spaziali che tendono all'infinito. Ad esempio:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \langle 0 | O_1(x_1) O_2(x_2+a) O_3(x_3) O_4(x_4+a) | 0 \rangle = \langle 0 | O_1(x_1) O_3(x_3) | 0 \rangle \langle 0 | O_2(x_2) O_4(x_4) | 0 \rangle \quad (14.1)$$

La proprietà si può dimostrare facilmente inserendo nel limite una somma di completezza ed utilizzando l'operatore di traslazione spaziale. La fattorizzazione avviene esponenzialmente man mano che la distanza va all'infinito. Questo significa che l'ampiezza complessiva di due processi di scattering che avvengono a distanze spaziali è fattorizzata e i due processi possono essere considerati indipendenti.

14.2 Prime identità di Ward

Ricaviamo ora le identità cui accennavamo prima. Il calcolo è simile all'ultimo della sezione precedente, con la differenza che partiamo dalle correnti conservate invece che dalle cariche. Consideriamo il prodotto

$$\langle 0 | T [J_a^\mu(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle \quad (14.2)$$

e applichiamo l'operatore ∂_μ^z . Ricordiamo che $\partial_\mu^z J_a^\mu(z) = 0$, dunque sopravviveranno solo i termini in cui la derivata agisce sulle funzioni θ del T-prodotto:

$$\begin{aligned} \partial_\mu^z \langle 0 | T [J_a^\mu(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle &= \delta(z_0 - x_0) \langle 0 | T \{ [J_a^\mu(z), \phi_i(x)] \phi_j(y) \} | 0 \rangle + \\ &+ \delta(z_0 - y_0) \langle 0 | T \{ [J_a^\mu(z), \phi_j(y)] \phi_i(x) \} | 0 \rangle \quad (14.3) \end{aligned}$$

Dei commutatori non è nullo solo quello relativo alla componente temporale della corrente di Noether, che può essere facilmente calcolato utilizzando le regole di commutazione canoniche. Si ottiene in questo modo l'insieme di identità di Ward relativo a due operatori:

$$\begin{aligned} \partial_\mu^z \langle 0 | T [J_a^\mu(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle &= i\delta^4(z-x) \lambda_{ik}^a \langle 0 | T \phi_k(x) \phi_j(y) | 0 \rangle + \\ &+ i\delta^4(z-y) \lambda_{jk}^a \langle 0 | T \phi_i(x) \phi_k(y) | 0 \rangle \quad (14.4) \end{aligned}$$

Queste identità non richiedono l'invarianza del vuoto nella teoria ma sono del tutto generali. Vediamo ora che possiamo riprodurre le stesse conclusioni raggiunte precedentemente per una teoria con mass-gap. Integriamo in $d^4 z$. A destra questo semplicemente ci toglie di mezzo le funzioni delta di Dirac. A sinistra, invece otteniamo come risultato zero perché:

- l'integrazione spaziale, se si applica prima il teorema della divergenza e poi la proprietà di clustering, è nullo. Infatti l'integrale di superficie che si ottiene applicando il teorema della divergenza ha un'integrando che va a zero esponenzialmente per il clustering laddove l'elemento di superficie va come r^2 , dove r è il raggio del volume di integrazione. Mandando il volume all'infinito si ottiene zero.
- l'integrazione temporale restituisce sostanzialmente la carica conservata che agendo sul vuoto dà zero in presenza di mass-gap.

Si riottiene dunque l'identità 13.17 e valgono tutte le considerazioni conseguenti.

14.3 Derivazione dall'integrale funzionale

Le identità di Ward già mostrate non sono che una piccola parte di un insieme molto generale di identità che può essere ricavato in maniera rigorosa dal funzionale generatore. Supponiamo quindi di avere una teoria scalare con gruppo di simmetria $SO(N)$, e inoltre che la regolarizzazione dell'integrale funzionale euclideo lasci immutate le simmetrie. Questo non è un fatto scontato perché l'introduzione di un cut-off può far perdere alcune proprietà di simmetrie, come accade ad esempio per l'invarianza di scala o la simmetria chirale del fotone. La teoria di cui ci occupiamo è regolarizzabile senza particolari problemi. Il funzionale generatore è¹⁷:

¹⁷indichiamo le sorgenti con ρ piuttosto che con J per evitare in seguito confusione con le correnti di Noether.

$$Z(\rho) = \int \delta\phi e^{S(\phi) - \int \rho_k \phi_k} \quad (14.5)$$

Con un cambio di coordinate $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + g_a(x)\lambda^a\phi(x)$ si ottiene, per il teorema di Noether ed essendo lo jacobiano unitario:

$$\begin{aligned} Z(\rho) &= \int \delta\phi e^{-S(\phi + \delta\phi) + \int \rho_k (\phi_k + g_a \lambda_{kl}^a \phi_l)} = \\ &= \int \delta\phi e^{-S(\phi) - \int \partial_\mu g_a J_a^\mu + \int \rho_k (\phi_k + g_a \lambda_{kl}^a \phi_l)} = \\ &= \int \delta\phi e^{-S(\phi) + \int \rho_k \phi_k} \left\{ 1 - \int d^4 x \partial_\mu g_a(x) J_a^\mu(x) + \int d^4 x \rho_k(x) g_a(x) \lambda^{kl} \phi_l(x) \right\} \end{aligned} \quad (14.6)$$

Abbiamo semplicemente sviluppato l'espressione per trasformazioni infinitesime. Ora, notiamo che l'ultima riga è data dalla somma di $Z(J)$ più un termine al prim'ordine in g , che chiaramente dev'essere nullo perché noi siamo partiti da $Z(J)$. Dunque si ha l'identità:

$$\begin{aligned} - \int d^4 x \partial_\mu g_a(x) \int \delta\phi e^{-S(\phi) + \int \rho_k \phi_k} J_a^\mu(x) + \\ + \int d^4 x g_a(x) \rho_k(x) \lambda_{kl}^a \int \delta\phi e^{-S(\phi) + \int \rho_k \phi_k} \phi_l(x) = 0 \end{aligned} \quad (14.7)$$

Per accorciare la notazione, notiamo che nell'espressione compaiono dei valori medi leggermente modificati poiché calcolati tramite il funzionale con l'aggiunta del termine delle sorgenti. Indichiamo questi valori medi, ad esempio, con $\langle J_a^\mu \rangle_\rho$.

$$- \int d^4 x \partial_\mu g_a(x) \langle J_a^\mu(x) \rangle_\rho + \int d^4 x g_a(x) \rho_k(x) \lambda_{kl}^a \langle \phi_l(x) \rangle_\rho = 0 \quad (14.8)$$

Integrando per parti il primo termine e sfruttando il lemma fondamentale del calcolo variazionale si ha:

$$\partial_\mu^x \langle J_a^\mu(x) \rangle_\rho + \rho_k(x) \lambda_{kl}^a \langle \phi_l(x) \rangle_\rho = 0 \quad (14.9)$$

Questa espressione contiene formalmente tutte le identità di Ward per il prodotto un numero qualsiasi di operatori. Per ottenerle esplicitamente dobbiamo procedere con le derivate funzionali valutate in $\rho = 0$. Ad esempio con una derivata $\frac{\delta}{\delta\rho_i(y)}$ si ottiene l'identità:

$$\partial_\mu^x \langle J_a^\mu(x) \phi(y) \rangle + \lambda_{il}^a \delta^4(x-y) \langle \phi_l(x) \rangle = 0 \quad (14.10)$$

Procedendo con le derivate funzionali si ottiene tutta una gerarchia di identità di Ward. Notiamo che per fare ciò non abbiamo dovuto utilizzare i commutatori a tempi uguali né altre quantità pericolosamente definite. Rimane il problema della rimozione del cut-off, ed è un problema molto delicato nel quale non ci inoltreremo.

15 Teorema di Goldstone

Vogliamo a questo punto esplorare le conseguenze di una non invarianza dello stato di vuoto in una teoria di campo con simmetrie continue. Tuttavia non è formalmente corretto esprimere la non-invarianza del vuoto tramite la condizione $Q^a |0\rangle \neq 0$. In realtà infatti tale stato non fa parte dello spazio di Hilbert della nostra teoria non essendo correttamente normalizzato¹⁸. Occorre introdurre i cosiddetti parametri d'ordine, un insieme di operatori scalari $O_i(x)$ con regole di commutazione:

$$[Q^a, O_i(x)] = iR_{ik}^a O_k(x) \quad (15.1)$$

tali che $\langle 0|O_i(0)|0\rangle \neq 0$. Se la rappresentazione cui appartengono i parametri d'ordine è irriducibile e non banale questo equivale a dire che $R_{ik}^a \langle 0|O_k(0)|0\rangle \neq 0$ e cioè che Q^a non annichila il vuoto. Con queste premesse, calcoliamo¹⁹:

¹⁸la sua norma viene infinita.

¹⁹sottintendiamo la normalizzazione covariante per gli stati.

$$\begin{aligned}
\langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle &= \sum_n \langle 0 | J_a^\mu(x) | n \rangle \langle n | O_i(0) | 0 \rangle = \\
&= \sum_n \langle 0 | e^{iPx} J_a^\mu(0) e^{-iPx} | n \rangle \langle n | O_i(0) | 0 \rangle = \\
&= \int d^4 q \sum_n \langle 0 | J_a^\mu(0) | n \rangle \langle n | O_i(0) | 0 \rangle \delta^4(q - p_n) e^{-ip_n x} = \\
&= \int d^4 q e^{-iqx} \rho_{a,i}^\mu(q)
\end{aligned} \tag{15.2}$$

con:

$$\rho_{a,i}^\mu(q) = \sum_n \langle 0 | J_a^\mu(0) | n \rangle \langle n | O_i(0) | 0 \rangle \delta^4(q - p_n) \tag{15.3}$$

Sotto una trasformazione di Lorentz propria, si ha: $\rho_{a,i}^\mu(\Lambda q) = \Lambda_\nu^\mu \rho_{a,i}^\nu(q)$. Questo lo si può vedere facilmente cambiando la base della sommatoria dagli stati $|n\rangle$ agli stati $|\Lambda n\rangle$ e sfruttando le proprietà degli operatori J^μ , vettoriale, e O_i , scalare, sotto trasformazioni di Lorentz. Sapendo che lo spettro degli stati fisici è caratterizzato dalle due condizioni $q_0 \geq 0$ e $q^2 \geq 0$, possiamo scrivere:

$$\rho_{a,i}^\mu(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \theta(q_0) \rho_{a,i}(q^2) q^\mu \tag{15.4}$$

La funzione $\rho_{a,i}^\mu$ ci interessa molto perché contiene tutte le informazioni sullo spettro di massa della teoria. Abbiamo:

$$\langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} e^{-iqx} q^\mu \theta(q_0) \rho_{a,i}(q^2) \tag{15.5}$$

Sfruttando il teorema di Noether possiamo scrivere:

$$0 = \partial_\mu^x \langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle = -i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} e^{-iqx} q^2 \theta(q_0) \rho_{a,i}(q^2) \tag{15.6}$$

$$\longrightarrow q^2 \rho_{a,i}(q^2) = 0 \tag{15.7}$$

Dunque $\rho(q^2)$ dev'essere nulla per ogni $q^2 \neq 0$. La soluzione banale $\rho_{a,i}(q^2) = 0$ deve essere scartata, dunque l'unica possibilità è che $\rho_{a,i}(q^2)$ sia

una distribuzione, e in particolare sia proporzionale ad una delta di Dirac: $\rho_{a,i}(q^2) = c_{a,i} \delta(q^2)$ con almeno uno dei coefficienti non nullo. Per calcolare questi coefficienti possiamo ancora ricorrere ad una delle due ipotesi del teorema, il fatto che i parametri d'ordine hanno valor medio sul vuoto diverso da zero. Questa ipotesi si sfrutta in maniera abbastanza naturale calcolando il prodotto $\langle 0 | O_i(0) J_a^\mu(x) | 0 \rangle$ con l'ordine degli operatori scambiato, cioè praticamente ricostruendo il commutatore. Per ottenere poi da questo calcolo una condizione stringente sui coefficienti dovremo invocare il teorema TCP, dunque ora ci serve una piccola digressione sugli operatori antilineari, poiché, per la presenza dell'inversione temporale, tale è l'operatore $\Theta = \text{TCP}$. Conviene tornare ad una notazione più matematica per il prodotto scalare. In questa notazione sappiamo che un operatore lineare è completamente determinato se conosciamo, per ogni coppia ϕ, ψ di vettori, il prodotto:

$$(\phi, A\psi) = (A^\dagger \phi, \psi) \quad (15.8)$$

Per operatori antilineari, come Θ , questa condizione diventa:

$$(\phi, \Theta\psi) = (\Theta^\dagger \phi, \psi)^* \quad (15.9)$$

L'operatore Θ è unitario, ovvero $\Theta^\dagger \Theta = 1$, e sugli operatori $O_i(x)$ e $J^\mu(x)$ agisce nel seguente modo:

$$\begin{cases} \Theta^\dagger O_i(x) \Theta = O_i(-x) \\ \Theta^\dagger J^\mu(x) \Theta = -J^\mu(-x) \end{cases} \quad (15.10)$$

Sfruttando queste proprietà calcoliamo, in questa diversa notazione, il prodotto $\langle 0 | O_i(0) J_a^\mu(x) | 0 \rangle$. Indichiamo il vuoto con ψ_Ω e ricordiamo che $\Theta\psi_\Omega = \psi_\Omega$. Facciamo un calcolo a gambero. Si ha:

$$\begin{aligned} \langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle &= (\psi_\Omega, J_a^\mu(x) O_i(0) \psi_\Omega) = (\psi_\Omega, \Theta^\dagger \Theta J_a^\mu(x) O_i(0) \psi_\Omega) = \\ &= (\Theta \psi_\Omega, \Theta J_a^\mu(x) O_i(0) \psi_\Omega)^* = (\psi_\Omega, \Theta J_a^\mu(x) \Theta^\dagger \Theta O_i(0) \Theta^\dagger \Theta \psi_\Omega)^* = \\ &= -(\psi_\Omega, J_a^\mu(-x) O_i(0) \psi_\Omega)^* = -(J_a^\mu(-x) O_i(0) \psi_\Omega, \psi_\Omega) = \\ &= -\langle 0 | O_i(0) J_a^\mu(-x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (15.11)$$

Abbiamo ottenuto che:

$$\langle 0 | O_i(0) J_a^\mu(x) | 0 \rangle = -\langle 0 | J_a^\mu(-x) O_i(0) | 0 \rangle \quad (15.12)$$

In rappresentazione spettrale abbiamo:

$$\langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle = c_{a,i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} e^{-iqx} q^\mu \theta(q_0) \delta(q^2) \quad (15.13)$$

$$\langle 0 | O_i(0) J_a^\mu(x) | 0 \rangle = -c_{a,i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} e^{iqx} q^\mu \theta(q_0) \delta(q^2) \quad (15.14)$$

Il commutatore risulta essere:

$$\langle 0 | [J_a^\mu(x), O_i(0)] | 0 \rangle = c_{a,i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \delta(q^2) q^\mu \theta(q_0) (e^{-iqx} + e^{iqx}) \quad (15.15)$$

Vogliamo andare a sfruttare la condizione 15.1 per dimostrare che i coefficienti sono diversi da zero. Per fare questo dobbiamo integrare in $d^3 x$ la componente temporale della corrente di Noether. Prima di integrare però facciamo ancora qualche passaggio ponendo $x^0 = 0$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | [J_a^0(\mathbf{x}, 0), O_i(0)] | 0 \rangle &= c_{a,i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \delta(q^2) q^0 \theta(q_0) (e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}) = \\ &= c_{a,i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \frac{\delta(q_0)}{2|\mathbf{q}|} |\mathbf{q}| (e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}) = \frac{c_{a,i}}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} (e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{c_{a,i}}{2} 2\delta(\mathbf{x}) = c_{a,i} \delta(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (15.16)$$

A questo punto integrare è facile:

$$\langle 0 | [Q^a, O_i(0)] | 0 \rangle = \int d^3 x \langle 0 | [J_a^0(\mathbf{x}, 0), O_i(0)] | 0 \rangle = c_{a,i} \quad (15.17)$$

Se ne deduce che $c_{a,i} = iR_{ik}^a \langle 0 | O_k(0) | 0 \rangle \neq 0$. Questo, per le proprietà della rappresentazione spettrale, ci dice che nella teoria sono presenti particelle di massa nulla. Non è detto queste particelle siano presenti nella lagrangiana: possono anche apparire come stati legati, come di fatto avviene in QCD nel caso di rottura della simmetria chirale, o in materia condensata per i superconduttori. Ora non ci rimane che determinare le loro proprietà.

15.1 Proprietà del bosone di Goldstone

Innanzitutto dobbiamo ancora mostrare che è un bosone. Gli operatori O_i sono scalari, dunque si può vedere che applicando una rotazione spaziale gli stati $O_i(0)|0\rangle$ rimangono invariati. Per dei fermioni ci aspetteremo un cambiamento di segno nel caso di una rotazione intorno ad un asse qualsiasi di 2π . Questo fatto ci assicura che le particelle di massa nulla che il teorema di Goldstone introduce nella teoria sono effettivamente bosoni, e che il nome di bosone di Goldstone è dunque giustificato. Ci rimane da determinare lo spin.

(manca la deduzione dello spin del bosone di Goldstone)

15.2 Deduzione dalle identità di Ward

Il teorema di Goldstone è un risultato che discende direttamente dagli assiomi fondamentali della teoria dei campi. La sua validità non dipende né da calcoli perturbativi né dalla scelta di una determinata lagrangiana. Prova ne è il fatto che si può dedurre direttamente dalle identità di Ward le quali, a loro volta, sono espressione semplicemente delle proprietà di simmetria di una teoria. Nell'euclideo²⁰ possiamo scrivere la seguente identità di Ward:

$$\partial_\mu^x \langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle + \delta^4(x) R_{ik}^a \langle O_k(0) \rangle = 0 \quad (15.18)$$

Ricordiamo che secondo le nostre ipotesi $\langle O_k(0) \rangle \neq 0$. Per soddisfare le proprietà di Lorentz dobbiamo porre $\langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle = \partial_x^\mu F_{a,i}(x)$. L'identità di Ward diventa allora:

$$\Delta_4 F_{a,i}(x) = -\delta^4(x) R_{ik}^a \langle O_k(0) \rangle \quad (15.19)$$

Ne deduciamo che $F_{a,i}(x)$ dev'essere proporzionale alla funzione di Green del laplaciano in quattro dimensioni. Con dei semplici passaggi nello spazio di Fourier si ottiene:

$$\langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle = i R_{ik}^a \langle O_k(0) \rangle \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^\mu}{q^2} e^{iqx} \quad (15.20)$$

Dalla posizione del polo, che rimane invariata in un eventuale passaggio al minkowskiano, si ottiene il teorema di Goldstone.

²⁰Ricordiamo che nell'euclideo il gruppo di Lorentz diventa una simmetria $O(4)$.

16 Rottura spontanea della simmetria

Proviamo a fare un semplice esempio di rottura spontanea di simmetria. Consideriamo un reticolo di spin descritto dall'hamiltoniana $H = -I \sum_{i,k} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_k$ dove la somma è estesa a tutti i primi vicini. Chiaramente abbiamo un'invarianza per rotazioni: se ruotiamo tutti gli spin del reticolo dello stesso angolo l'energia del sistema rimane uguale. La magnetizzazione del reticolo è data dalla somma di tutti gli spin: $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{S}_i$. Il suo valor medio si calcola con la somma di partizione:

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \frac{\int d\mathbf{S} e^{-\beta H} \sum_i \mathbf{S}_i}{\int d\mathbf{S} e^{-\beta H}} \quad (16.1)$$

Se ora facciamo una rotazione $\mathbf{S}_i \rightarrow O(R) \mathbf{S}_i$, la misura $d\mathbf{S}$ rimane invariata essendo la trasformazione ortogonale, così come il termine $e^{-\beta H}$, mentre chiaramente al numeratore gli spin vengono trasformati. Poiché d'altra parte sappiamo che il sistema gode di invarianza sotto rotazioni, se ne deduce che $\langle \mathbf{M} \rangle = O(R) \langle \mathbf{M} \rangle$. Questa relazione è vera solo se $\langle \mathbf{M} \rangle = 0$, ma l'esperienza ci dice che esiste il fenomeno della magnetizzazione spontanea. Affinché la teoria sia fedele alla fenomenologia dobbiamo predisporre un meccanismo di rottura spontanea della simmetria: prendere il magnete, immergerlo in un piccolo campo magnetico esterno, aggiungendo così all'hamiltoniana un termine che rompe la simmetria, dopodiché fare il limite di volume infinito del magnete e mandare il campo esterno a zero. In questo modo si recupera, se la temperatura è inferiore a quella critica chiaramente, la magnetizzazione spontanea. Lo stesso facciamo in teoria dei campi. Ad esempio per una teoria scalare con simmetria $SO(N)$ per il valore di aspettazione del campo abbiamo un'espressione analoga a quella della magnetizzazione media di un magnete:

$$\langle \phi_i \rangle = \frac{\int \delta\phi e^{-S(\phi)} \phi_i}{\int \delta\phi e^{-S(\phi)}} \quad (16.2)$$

Il valore medio di ϕ_i così calcolato sarà sempre nullo. Per avere rottura spontanea della simmetria dobbiamo aggiungere all'Hamiltoniana un termine aggiuntivo:

$$H_0 \rightarrow H = H_0 + \epsilon_i \int O_i(x) d^3x \quad (16.3)$$

In questo modo l'hamiltoniana non commuta più con le cariche conservate dovute alla simmetria originaria. Vedremo che l'aggiunta di questo pezzo fornisce una massa al bosone di Goldstone della teoria. Dovendo prendere il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ alla fine del procedimento siamo autorizzati a procedere con metodi perturbativi. Indichiamo con $|\mathbf{p}\rangle$ gli stati ad una particella del bosone di Goldstone. Il primo problema pratico è che dobbiamo discretizzare lo spettro di questi stati per poter fare la teoria delle perturbazioni. Lo spettro degli stati di Goldstone è il seguente:

$$H_0 |\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p}| |\mathbf{p}\rangle \quad (16.4)$$

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (16.5)$$

Per eliminare questo problema introduciamo un volume V con condizioni periodiche al bordo con il quale riempiamo tutto lo spazio tempo; questo restringe lo spettro dell'impulso ai soli valori discreti $\mathbf{p}_n = \frac{2\pi\mathbf{n}}{L}$. Indichiamo questi stati con $|\mathbf{p}\rangle_V$. La normalizzazione a volume finito sarà data da una delta di Kronecker:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle_V = \delta_{pp'} \quad (16.6)$$

Gli stati veri si ottengono con un limite per $V \rightarrow \infty$:

$$|\mathbf{p}\rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} |\mathbf{p}\rangle_V \quad (16.7)$$

Infatti la relazione fra le due normalizzazioni, con delta di Dirac e delta di Kronecker, è la seguente:

$$\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3 x e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V \delta_{pp'}}{(2\pi)^3} \quad (16.8)$$

Questa premessa ci serve per impostare il calcolo in teoria delle perturbazioni. La variazione di energia degli stati perturbati al prim'ordine è data da:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\mathbf{p}} &= \langle \mathbf{p} |_V \epsilon_i \int_V O_i(\mathbf{x}, x^0) d^3 x | \mathbf{p} \rangle_V = \epsilon_i \int_V \langle \mathbf{p} |_V O_i(0) d^3 x | \mathbf{p} \rangle_V = \\ &= V \epsilon_i \langle \mathbf{p} |_V O_i(0) d^3 x | \mathbf{p} \rangle_V \end{aligned} \quad (16.9)$$

La perturbazione commuta con l'impulso spaziale, dunque gli stati perturbati hanno lo stesso impulso di quelli imperturbati: la differenza di energia è dovuta alla presenza di una massa: $\Delta E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} - |\mathbf{p}|$. Poiché la massa tende a zero, per $\epsilon \rightarrow 0$, possiamo sviluppare in potenze di m attorno a zero:

$$\Delta E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} - |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}| \sqrt{1 + \frac{m^2}{\mathbf{p}^2}} - |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}| \left(1 + \frac{m^2}{2|\mathbf{p}|^2} \right) - |\mathbf{p}| = \frac{m^2}{2|\mathbf{p}|} \quad (16.10)$$

Recuperando l'espressione per ΔE e passando al limite infinito abbiamo:

$$m^2 = (2\pi)^3 \epsilon_i 2|\mathbf{p}| \langle \mathbf{p} | O_i(0) | \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^3 \epsilon_i \langle \widetilde{\mathbf{p}} | O_i(0) | \widetilde{\mathbf{p}} \rangle \quad (16.11)$$

Essendo O_i uno scalare, il prodotto $\langle \widetilde{\mathbf{p}} | O_i(0) | \widetilde{\mathbf{p}} \rangle$ non dipende dall'impulso ma è una costante. Abbiamo dunque ottenuto il valore della massa assunta dal bosone di Goldstone e scoperto che m va a zero con la radice di ϵ .

Ora vogliamo vedere cosa succede alle identità di Ward in caso di rottura spontanea della simmetria. L'integrale funzionale, con il driving-term aggiuntivo, è:

$$Z(\rho) = \int \delta\phi e^{-S_0(\phi) - \int \epsilon_i O_i + \int \rho_i \phi_i} \quad (16.12)$$

Seguendo lo stesso procedimento già utilizzato per ricavare le identità di Ward, eseguiamo una trasformazione $\phi_i(x) \rightarrow \phi_i(x) + g_a(x) \lambda_{ij}^a \phi_j(x)$. La trasformazione dei campi in questo caso deve essere accompagnata anche da una trasformazione degli operatori O_i , che avverrà secondo una qualche rappresentazione del gruppo di simmetria: $O_i(x) \rightarrow O_i(x) + g_a(x) R_{ij}^a O_j(x)$. Sviluppando il funzionale al prim'ordine in g si ottiene un pezzo aggiuntivo nelle identità di Ward:

$$\partial_\mu \langle J_a^\mu(x) \phi_i(0) \rangle_\rho + \delta^4(x) \lambda_{ik}^a \langle \phi_k(x) \rangle_\rho + \epsilon_i R_{ik}^a \langle O_k(x) \phi_i(0) \rangle_\rho = 0 \quad (16.13)$$

Analoghe identità si possono scrivere direttamente per il parametro d'ordine $\langle O_i \rangle$. Si può così vedere che l'aggiunta del driving term, con la conseguente modifica delle identità di Ward, rende diverso da zero tale valor medio.

16.1 Meccanismo di Higgs

Ci rimane da capire cosa avviene in caso di rottura di simmetria in presenza di un campo di gauge. Vediamo un caso molto semplice: prendiamo la lagrangiana di un campo scalare carico:

$$L = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - m^2 \bar{\phi} \phi - g(\bar{\phi} \phi)^2 \quad (16.14)$$

Per $m^2 < 0$ abbiamo rottura spontanea di simmetria (il segno di g è fondamentale). Infatti l'hamiltoniana è²¹:

$$H = \dot{\bar{\phi}} \dot{\phi} + \nabla \bar{\phi} \cdot \nabla \phi + (-m^2) \bar{\phi} \phi + g(\bar{\phi} \phi)^2 \quad (16.15)$$

Abbiamo due punti di minimo: uno instabile per $\phi = 0$ ed uno per $\bar{\phi} \phi = \frac{m^2}{2g}$. Punto per punto possiamo parametrizzare il campo come $\phi(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)}$. La lagrangiana diventa:

$$L = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + m^2 \rho^2 - g\rho^4 \quad (16.16)$$

Se introduciamo l'invarianza di gauge $U(1)$ con il suo rispettivo campo A_μ , dobbiamo aggiungere la lagrangiana libera del campo di Yang-Mills ed effettuare la sostituzione minimale, con nel caso dei campi ρ e θ è semplicemente data da $\partial_\mu \theta \rightarrow \partial_\mu \theta - eA_\mu$ con ρ invariato. La lagrangiana è:

$$L = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 (\partial_\mu \theta - eA_\mu) (\partial^\mu \theta - eA^\mu) + m^2 \rho^2 - g\rho^4 - \frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4} \quad (16.17)$$

La quantizzazione di questa teoria mostra il fenomeno di Higgs. Abbiamo tre particelle in corrispondenza dei tre campi ρ, θ, A_μ . La particella θ è il bosone di Goldstone presente in virtù della rottura di simmetria che si ha nella stato di vuoto, ed ha, a prima vista, massa nulla. In realtà il campo θ ed il campo A_μ si possono ricombinare insieme in maniera naturale nel campo B_μ tramite la relazione $\partial_\mu \theta - eA_\mu = -eB_\mu$. Notiamo infatti che $\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e dunque che il tensore di Yang-Mills rimane invariato. La lagrangiana dipende solo da ρ e B_μ :

$$L = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 B_\mu B^\mu + m^2 \rho^2 - g\rho^4 - \frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4} \quad (16.18)$$

²¹esplicitiamo il segno negativo di m^2

Il campo ρ può essere riscritto come $\frac{m}{\sqrt{2g}} + \eta(x)$: valor medio nel vuoto più fluttuazioni. In questo modo dal termine $\rho^2 B_\mu B^\mu$ sorge fuori un termine di massa del campo B_μ . Ci ritroviamo con un campo vettoriale massivo. In maniera qualitativa, questo è il fenomeno di Higgs. La sparizione del campo θ in contemporanea alla sostituzione $A_\mu \rightarrow B_\mu$ che fornisce una massa al campo di gauge si può dedurre anche dal metodo di Faddeev-Popov applicato al funzionale generatore associato a questa lagrangiana. Inoltre, lo stesso discorso può essere fatto nel caso di teorie di gauge non-abeliane.