Esame Scritto Fisica Quantistica

Alessandro Pilloni

(Dated: 18/02/2022)

Durata: 2 ore. È consentito l'uso del foglio dei Clebsch-Gordan del PDG.

ESERCIZIO 1

Una particella di spin 1/2 e massa m è vincolata a muoversi su una sfera di raggio R. Al tempo $t = 0$ lo stato della particella è descritto dallo spinore

$$|\psi(t=0)\rangle = N \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \cos\theta \end{pmatrix} , \tag{1}$$

dove N è una costante di normalizzazione. La sua Hamiltoniana è:

$$H = \frac{\vec{L}^2}{2mR^2} + \omega\left(L_z + 2S_z\right) . \tag{2}$$

1. Determinare al tempo $t = 0$ i possibili risultati di una misura di $\vec{L}^2$, L_z, S_z, $\vec{J}^2$, J_z, dove al solito $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, e le relative probabilità;

2. Determinare lo stato del sistema al tempo t;

3. Dire quali dei risultati di cui al punto 1. valgono ad ogni tempo, e motivare la risposta.

ESERCIZIO 2

Due particelle identiche di spin 1/2 e massa m sono vincolate a muoversi sulla superfice di una sfera di raggio R. La loro Hamiltoniana è:

$$H = \frac{1}{2mR^2}\left(\vec{L}_1^2 + \vec{L}_2^2 + \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\right) , \tag{3}$$

dove $\vec{L}_{1,2}$ e $\vec{S}_{1,2}$ sono rispettivamenti i momenti angolari orbitali e di spin delle particelle 1 e 2.

Al tempo $t = 0$ una misura di $\vec{L}_1^2$ e di $\vec{L}_2^2$ dà con certezza $2\hbar^2$ per entrambe le particelle; una misura di L_{1z} e di L_{2z} dà con certezza $+\hbar$ per una particella e $-\hbar$ per l'altra; una misura di S_{1z} e di S_{2z} dà con certezza $+\hbar/2$ per una particella e $-\hbar/2$ per l'altra.

1. Determinare il più generale stato che soddisfa le condizioni precedenti.

2. Per lo stato di cui al punto 1., determinare, al tempo $t = 0$, i possibili risultati di una misura di L_{Tz}, S_{Tz}, J_{Tz}, dove $\vec{L}_T = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$, $\ldots$, e le rispettive probabilità.

3. Determinare completamente lo stato di cui al punto 1. imponendogli di essere autostato di H.

4. Per lo stato di cui al punto 3., determinare in funzione del tempo i possibili risultati di una misura di $\vec{L}_T^2$, $\vec{S}_T^2$, $\vec{J}_T^2$, e le loro probabilità.