Esame scritto di Fisica Quantistica 16-01-2023

Esercizio 1

Considera un sistema quantistico descritto a t=0 dalla funzione d'onda:

$$\psi(r,\theta,\phi) = A\, R(r)(cos\theta + sin\theta\ cos\phi)$$

con la parte radiale che soddisfa:

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = 1$$

4) Determina $|A|$ in modo che la funzione d'onda sia normalizzata.
5) Dimostra che $\langle L_+\rangle = \langle L_-\rangle$, dove $\vec{L}$ è l'operatore del momento angolare.
6) Supponi ora che il sistema è descritto dalla seguente hamiltoniana:
$$H = \frac{L^2}{2I} + \alpha L_z$$
Determina la funzione d'onda al tempo generic t, e i possibli risultati e corrispondenti probabilità di una misura di L_z.

Suggerimento: Se necessario utilizza le armoniche sferiche della tabella nell'ultima pagina.

Esercizio 2

Considera un sistema a simmetria sferica di due particelle identiche descritte, nel sistema del centro di massa, dalla seguente Hamiltoniana:

$$H_0 = \alpha\left(L^2 + \frac{J^2}{2} + \frac{\hbar J_z}{2}\right), \quad \alpha > 0$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale del sistema, mentre $\vec{J}$ è il momento angolare totale.

1) Determina lo stato fondamentale e I primi due eccitati se le particelle sono bosoni di spin 1;
2) Supponi di aggiungere all'Hamiltoniana un nuovo termine:
$$V = \epsilon\alpha\vec{L}\cdot\vec{S}\ \text{con}\ \ 0 < \epsilon \ll 1$$
dove $\vec{S}$ è lo spin totale. Ricalcola esattamente I livelli energetici del punto precedente. *[Nota che la condizione su ϵ non richiede necessariamente la teoria delle perturbazioni. Il problema va risolto esattamente]*

Suggerimento 1: Ricorda che nel centro di massa lo scambio di particelle coincide con la parità: $|l\ l_z\rangle \to (-1)^l |l\ l_z\rangle$.

Suggerimento 2: Se appropriato, usa la tabella nell'ultima pagina.