Esame Scritto Fisica Quantistica

Alessandro Pilloni

(Dated: 11/09/2023)

Durata: 2 ore. È consentito l'uso del foglio dei Clebsch-Gordan del PDG.

ESERCIZIO 1

Si consideri una particella di spin 1/2 vincolata a muoversi su una sfera di raggio unitario. Si consideri lo stato

$$|\psi(t=0)\rangle = A \begin{pmatrix} Y_1^0 \\ \sqrt{2}\, Y_1^1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

dove A è una costante di normalizzazione, e $Y_l^m(\theta,\phi)$ è l'armonica sferica.

1. Si considerino i tre operatori J^2, L^2 e J_z, dove al solito $\vec{L}$ indica il momento angolare orbitale e $\vec{J}$ il momento angolare totale. Si dica di quali operatori $|\psi(t=0)\rangle$ è autostato. Se lo sono, si calcoli l'autovalore. Se non lo sono, calcolare i possibili risultati di una misura e le rispettive probabilità.

2. Si calcoli la costante A in modo che lo stato sia normalizzato.

3. Se l'Hamiltoniana del sistema è $H = \omega J^2/\hbar - \omega J_z$, si calcoli l'evoluzione temporale $|\psi(t)\rangle$.

ESERCIZIO 2

Due particelle identiche di spin 1/2 e massa m sono vincolate a muoversi sulla superfice di una sfera di raggio R. La loro Hamiltoniana è:

$$H = \frac{1}{2mR^2}\left(\vec{L}_1^2 + \vec{L}_2^2 + \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 - \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\right) , \tag{2}$$

dove $\vec{L}_{1,2}$ e $\vec{S}_{1,2}$ sono rispettivamenti i momenti angolari orbitali e di spin delle particelle 1 e 2.

Al tempo $t = 0$ una misura di $\vec{L}_1^2$ e di $\vec{L}_2^2$ dà con certezza $2\hbar^2$ per entrambe le particelle; una misura di L_{1z} e di L_{2z} dà con certezza $+\hbar$ per una particella e $-\hbar$ per l'altra; una misura di S_{1z} e di S_{2z} dà con certezza $+\hbar/2$ per una particella e $-\hbar/2$ per l'altra.

1. Determinare il più generale stato che soddisfa le condizioni precedenti.

2. Per lo stato di cui al punto 1., determinare, al tempo $t = 0$, i possibili risultati di una misura di L_{Tz}, S_{Tz}, J_{Tz}, dove $\vec{L}_T = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$, $\ldots$, e le rispettive probabilità.