Esercizi

(Dated: May 31, 2022)

ESERCIZIO 1

Una particella di massa m e spin 1 è vincolata a muoversi su una superficie sferica di raggio R ed è immersa in un campo magnetico $\vec{B} = (0, 0, B)$ diretto lungo l'asse z. La sua hamiltoniana è $H = \vec{L}^2/(2mR^2) + \mu B\,(L_z + 2S_z)\,\hbar$ e all'istante iniziale si sa che:

- le misure di $\vec{J}^2$ e J_z forniscono con certezza i valori $2\hbar^2$ e $\hbar$ rispettivamente; una misura di $\vec{L}^2$ dà un risultato minore o uguale a $2\hbar^2$;
- $P(S_z = \hbar) = 2/3$, mentre $P(S_z = -\hbar) = 0$
- il valor medio di $\cos\theta$ è il massimo possibile.

Determinare: *i*) lo stato del sistema a un tempo t generico; *ii*) il valor medio di $\cos\theta$ e di $\vec{J}^2$ in funzione del tempo.

ESERCIZIO 2

Una particella di massa m e spin $1/2$ è vincolata a muoversi su una superficie sferica di raggio r. L'hamiltoniana è data da $H = \vec{L}^2/(2mr^2) + \alpha\,(L_z + 2S_z)$ con $\alpha > 0$. Dato lo stato del sistema al tempo $t = 0$ descritto dallo spinore non normalizzato

$$\Psi_0 \equiv \Psi(t=0) = N \begin{pmatrix} xz \\ yz \end{pmatrix} \cdot e^{-\gamma r^2} \qquad \text{con } \gamma > 0\,, \tag{1}$$

- si scriva lo stato Ψ_0 come combinazione dei prodotti tensoriali $|l, l_z\rangle \otimes |s, s_z\rangle$;
- calcolare la probabilità che $|J_z| \neq 3\hbar/2$
- ruotare lo stato Ψ_0 di un angolo π intorno all'asse z e scrivere l'evoluzione temporale dello stato iniziale.

Al tempo $\tau > 0$ viene eseguita sulla particella nello stato $\Psi(\tau)$ una misura dell'energia e si ottiene un valore $E > 3\hbar^2/(mr^2)$. Calcolare il valore d'aspettazione dell'operatore $\vec{J}^2$ per $t > \tau$.

(*Hint:* scrivete la Ψ_0 in coordinate polari, e provate ad ottenere la parte angolare come combinazioni di $Y_2^m(\theta, \phi)$...)

EXERCISE 3

The Hamiltonian of particle of spin 1/2 and mass m, constrained on the surface of a sphere of radius R, is given by

$$H = \frac{L^2}{2mR^2} + \frac{2\omega}{\hbar}\vec{L}\cdot\vec{S}\,. \tag{2}$$

Assume that at $t = 0$, the initial state of the particle is represented by the wave function $|\psi_0\rangle = Y_{10}\,|1/2, 1/2\rangle$, where the two spinors $|1/2, \pm 1/2\rangle$ indicate the eigenstates of S_z with eigenvalues $\pm\hbar/2$, respectively. Calculate:

1. The wave function at generic time t;
2. the probability P as a function of time to have the particle with $\theta < \pi/3$ and $S_z = -\hbar/2$.

EXERCISE 4

The hamiltonian of a particle with spin 1/2 is $H = \alpha\left(2\vec{J}^2 + \hbar J_z\right)/\hbar^2$, where $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ is the total angular momentum, and J_z its projection along the $z$axis. At $t = 0$ the state is

$$|\psi\rangle = N\left[|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{2}\,|2,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + e^{i\phi}\sqrt{3}\,|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right], \tag{3}$$

where N is a normalization constant. Calculate:

1. the spectrum of the hamiltonian;
2. the value of N that yields $\langle\psi|\psi\rangle = 1$;
3. the phase ϕ such that $\langle\psi|S_x|\psi\rangle$ is maximal;
4. what values and with what probabilities one can get with a measure of $\vec{L}^2$, L_z, S_z, $\vec{J}^2$, J_z;
5. the state at generic time t.

EXERCISE 5

The dynamics of a particle similar to a quantum rotor, in a magnetic field along the y-axis, are described by the hamiltonian

$$H = \frac{\vec{L}^2}{2I} + gBL_y. \tag{4}$$

Assuming that at $t = 0$ the wave function is $\psi_0(\theta, \phi) = A\left(\cos\theta + e^{i\phi}\sin\theta\right)$, with A a normalization constant, calculate the mean value of L_x and L_x^2 as a function of time, and the probability to find the rotor in the angular region $(\theta, \phi) \in [\pi/4, 3\pi/4] \times [-\pi/4, \pi/4]$.

ESERCIZIO 6

Due particelle identiche, indicate con A e B, di massa m e spin zero sono vincolate a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio unitario e soggette all'azione dell'hamiltoniana $H = \alpha\left(\vec{L}_A^2 + \vec{L}_B^2 + 5\vec{L}_A^2 \cdot \vec{L}_B/3\right)/\hbar^2$, con α parametro positivo. Classificare gli autovalori dell'hamiltoniana, i rispettivi autovettori e ele degenerazioni con $\vec{L}_A^2, \vec{L}_B^2 \le 2\hbar^2$, nei seguenti casi:

1. particelle distinguibili;

2. particelle indistinguibili